1 Fuerzas centrales

Ejercicio 1 Consideremos el campo central de fuerzas cuyo potencial está dado por $V(r) = r^\alpha$, donde r es la coordenada radial. Determinar el valor de α para el cual las trayectorias son círculos que pasan por el centro de fuerzas.

Ejercicio 2 En cada uno ,de los casos hallar el campo central de fuerzas a partir de las trayectorias.

- $r = a\,(1 + \cos(\theta))$
- $r = a\,e^{b\,\theta}$
- $\frac{1}{r} = a\,\cosh(\alpha(\theta - \theta_0))$

Ejercicio 3 Describir cualitativamente las órbitas del campo central cuyo potencial está dado por: $V(r) = -k\,\frac{e^{-\alpha\,r}}{r}$, donde $k, \alpha > 0$. Analizar la existencia de órbitas estables.

Ejercicio 4 Analizar la naturaleza de las órbitas para cada una de las siguientes fuerzas centrales, donde $k > 0$:

- $F_{\mathrm{re}p}(r) = \frac{k}{r^3}$
- $F_{\mathrm{at}r}(r) = -\frac{k}{r^3}$

Ejercicio 5 Dar condiciones sobre los parámetros para que las órbitas circulares sean estables. En tales casos, hallar el período de oscilación (del movimiento radial) para pequeñas oscilaciones.

- $V(r) = \frac{1}{2}\,k\,r^2$, donde $k > 0$.
- $V(r) = \frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^4}$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- $V(r) = -\frac{a}{r^k}$, donde $a > 0, k > 0$.

2 Campo gravitatorio.

Ejercicio 6 Plantear las ecuaciones de Newton en un sistema cartesiano fijo para una partícula de masa m sometida al campo gravitatorio terrestre y observar que no dependen de la masa de la partícula.

- Pasar las ecuaciones anteriores a coordenadas esféricas.
- Resolver el caso $\dot{r} = \dot{\phi} = 0$, o sea, el movimiento (plano) de un satélite.

  (i) Mostrar que la velocidad angular es constante. Verificar la 3^a ley de Kepler: "El cuadrado de la frecuencia es inversamente proporcional al cubo del radio". Leemos al amigo J. Kepler, *Armonices Mundi Libri V* (V, 3), «Proportio quae est inter binorum quorumcumque Planetarum tempora periodica sit praecise **sesquialtera** proportionis mediarum distantiarum»

  (ii) Hallar el período y la velocidad tangencial de un satélite que orbite a nivel del mar, a $100km$ de la superficie y a la distancia de la Luna.

(iii) ¿Cuál debe ser la altura a la que debe orbitar un satélite para que el período sea de un día? ¿Qué pasa si el plano de la órbita contiene al ecuador terrestre?

- Resolver el caso $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, o sea, un movimiento radial –tiro vertical–.

  (i) Describir cualitativamente el movimiento para cada valor de la velocidad inicial v.

  (ii) Hallar la altura máxima alcanzada en función de v. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial mínima necesaria para que el alcance máximo sea infinito? Esta velocidad se llama *velocidad de escape.*

Datos:
Constante de gravitación: $6{,}67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Masa de la Tierra: $5{,}98 \times 10^{24} kg$
Radio de la Tierra: $6400 km$
Distancia Luna-Tierra: $384000 km$