

**ANALES**  
**DE LA**  
**ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS**  
**EXACTAS, FISICAS Y NATURALES**  
**BUENOS AIRES**

---

**TOMO 55**

---

**BUENOS AIRES.**  
**2003**

## PROBLEMAS DIRECTOS E INVERSOS DE SISTEMAS DINÁMICOS PERTURBADOS

Pedro E. Zadunaisky

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires -  
Ciudad Universitaria - Pabellón 1, 1428 Buenos Aires. E-mail: pez@conae.gov.ar

### Resumen

Este trabajo concierne a sistemas dinámicos representados por ecuaciones diferenciales ordinarias conteniendo una función perturbadora. En los casos de "*problemas directos*" se resuelve y analiza las soluciones del sistema *siendo conocida la función perturbadora*. En los "*problemas inversos*" se resuelve y analiza la función perturbadora *siendo las soluciones prefijadas o conocidas por mediciones a intervalos regulares*. Se describen los métodos y resultados para varios ejemplos de problemas simulados matemáticamente.

*Palabras clave:* Función perturbadora; Problemas directos; Problemas inversos.

### Abstract

This work concerns dynamical systems represented through ordinary differential equations containing a perturbing function. In the case of "*direct problems*" they are solved and analyzed *when the perturbing function is known*. In the case of "*inverse problems*" the perturbing function is solved and analyzed when the solutions of the system are prefixed or known through measurements at regular intervals. Methods and results obtained are described for several examples in mathematically simulated problems.

*Key words:* Perturbing function; Direct problems; Inverse problems.

### 1. Introducción

Los problemas de que se trata concierne a sistemas dinámicos representados por sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{y} = f(y, \dot{y}, t) + P(t)$$

En los *problemas directos* las funciones  $f$  y  $P$  son conocidas y se trata de determinar y analizar las soluciones  $y(t)$ . En los *problemas inversos* las funciones  $f$  son conocidas y las  $y(t)$  son

datos  $y(t_n)$ , con  $n=1,2,3,\dots$  de valores prefijados o bien obtenidos por mediciones; en este caso se trata de determinar valores de  $P(t_n)$  considerada generalmente como una perturbación de magnitud menor.

En los ejemplos que siguen se tratan en detalle ambos tipos de problemas.

### 2. Oscilador armónico perturbado

La ecuación diferencial de un oscilador armónico con frecuencia propia  $\omega_0$  perturbado por una fuerza externa también armónica de frecuencia  $\omega$  es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = r \cos(\omega t) \quad (1)$$

Trabajo presentado con motivo de la entrega del premio "Reynaldo P. Cesco" en Astronomía, el 22 de noviembre de 2002.

donde  $r$  es un dato constante y cuya solución general se demuestra que es

$$x = k_1 r \cos(\omega t) + k_2 r \sin(\omega t) + r \cos(\omega t) / (\omega^2 - w^2) \quad (2)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes arbitrarias.

Asumiendo  $r = 1$  y que para las condiciones iniciales  $t = 0, \dot{x} = 0, x = 0$  resultan  $k_1 = -(\omega^2 - w^2)$  y  $k_2 = 0$  tenemos finalmente:

$$x = (\cos(\omega t) - \cos(\omega t)) / (\omega^2 - w^2) \quad (3)$$

$$\dot{x} = (-\omega \sin(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) / (\omega^2 - w^2)$$

#### A. Soluciones periódicas

Se verifica que, si se cumple la condición

$$T = \frac{2\pi m}{\omega} = \frac{2\pi n}{w} \quad \text{o sea} \quad \frac{m}{n} = \frac{\omega}{w} = q \quad (4)$$

donde  $m$  y  $n$  son convenientes números enteros y  $q$  un número racional o entero los valores de  $x$  y  $\dot{x}$  se repiten a intervalos o períodos iguales  $T$ . En ese caso el movimiento periódico puede representarse gráficamente en el denominado "Plano de las Fases" con coordenadas cartesianas  $(x, \dot{x})$  donde las curvas representativas son cerradas (ver figura 1A).

#### B. Soluciones "casi periódicas"

En el caso de que la relación entre  $\omega$  y  $w$  sea un número real, es decir no representable por una relación fraccionaria como  $m/n$  el movimiento pasa a ser "casi periódico". Nos proponemos determinar el "casi período" o sea el tiempo  $\tau$  necesario para pasar de una posición inicial  $(x, \dot{x})$  a otra en el entorno  $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ . Ese tiempo dependerá de las magnitudes de  $(dx, d\dot{x})$ . Ponemos en ese caso:

$$x + dx = r \cos(\omega(t + \tau) + k_1) + \frac{r}{\omega^2 - w^2} \cos(\omega(t + \tau) + k_2) \quad (5)$$

$$\dot{x} + d\dot{x} = -[r \omega \sin(\omega(t + \tau) + k_1) + \frac{r \omega}{\omega^2 - w^2} \sin(\omega(t + \tau) + k_2)] \quad (6)$$

donde se trata de hallar un valor del intervalo  $\tau$  tal que

$$|dx, d\dot{x}| < \delta \quad (7)$$

donde  $\delta$  sea un valor pequeño dado.

Aplicando algunas transformaciones trigonométricas elementales se pueden obtener las relaciones

$$\delta x = F \sin(\omega \frac{\tau}{2}) \quad \text{y} \quad \delta \dot{x} = G \sin(\omega \frac{\tau}{2}) \quad (8)$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones de argumentos trigonométricos de las formas

$$\sin(\omega(t + \frac{\tau}{2})), \quad \sin(\omega(t + \frac{\tau}{2})) \quad (9)$$

y por tanto son funciones acotadas y para lo que sigue las remplazaremos por una cota superior

$M$  y poniendo  $\frac{d \min}{M} < (dx, d\dot{x})$  resulta:

$$|\sin(\omega \frac{\tau}{M}), \sin(\omega \frac{\tau}{M})| < \frac{d \min}{M} \quad (10)$$

que define las condiciones que debe cumplir el intervalo  $\tau$  para que se alcance el entorno  $d \min$ . Por simplicidad pondremos:

$$\sin(2\pi\vartheta) < \frac{d \min}{M} \quad (11)$$

donde  $\vartheta$  sea un número suficientemente pequeño.

Para que se cumpla esa condición demostraremos que bastará con que se cumplan las desigualdades:

$$(|P - \frac{\omega \tau}{4\pi}| |Q - \frac{\omega \tau}{4\pi}|) < \vartheta \quad (12)$$

donde  $P$  y  $Q$  sean dos números enteros que se pueden calcular convenientemente del siguiente modo:

Siendo  $\alpha$  un número real se sabe que se puede calcular aproximadamente por un desarrollo en "fracción continua ilimitada" que se puede comenzar por una aproximación inicial de la forma

$[\alpha] + \frac{1}{\alpha_0}$  donde  $[\alpha]$  es la parte entera y  $\frac{1}{\alpha_0}$

la parte decimal de  $\alpha$ . [ref.(5)]

Se puede continuar el desarrollo de aproximaciones sucesivas de  $\alpha$  tales que se verifique

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{\omega Q_n} \quad (13)$$

donde  $\frac{P_n}{Q_n}$  es la "reducida" enésima del desarrollo.

Substituyendo el valor de  $\alpha$  por el cociente  $\omega_0/\omega$  resulta

$$\left| \frac{P_n}{\omega_0} - \frac{Q_n}{\omega} \right| \leq \frac{1}{\omega Q_n} \quad (14)$$

Se sabe que los números  $Q_n$  tienden a  $\infty$  con  $n$  y por tanto se encontrará un  $n$  tal que

$$\frac{1}{\omega Q_n} < \left( \frac{\vartheta}{\omega_0}, \frac{\vartheta}{\omega} \right) \quad (15)$$

Tomando ahora  $P = P_n$  y  $Q = Q_n$  resulta

$$\left| \frac{P}{\omega_0} - \frac{Q}{\omega} \right| < \left( \frac{\vartheta}{\omega_0}, \frac{\vartheta}{\omega} \right) \quad (16)$$

Adoptando un valor de  $\tau$  tal que

$$\frac{\tau}{4\pi} = \frac{1}{2} \left| \frac{P}{\omega_0} - \frac{Q}{\omega} \right| \quad (17)$$

resulta finalmente:

$$\tau = 2\pi \left| \frac{P}{\omega_0} - \frac{Q}{\omega} \right| \quad (18)$$

que es el valor del casi período que asegura las condiciones (16) o bien (12).

## Ejemplos

### Caso Periódico

Datos:  $\omega_0=3$   $\omega=1$   $m=3$   $n=1$

$$\text{Período } T = \frac{2\pi m}{\omega_0} = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi$$

(Figura 1A)

### Caso Casi Periódico

Datos:  $\omega_0=\pi$   $\omega=1$

Fracción continua:

$$P=13, Q=4, \left| \frac{P}{Q} - \omega_0 \right| < 0.11, \left| \frac{P}{\omega_0} - Q \right| = 0.13$$

Casi período:  $\tau = 2\pi * 0.13 = 0.87$

(Figura 1B)

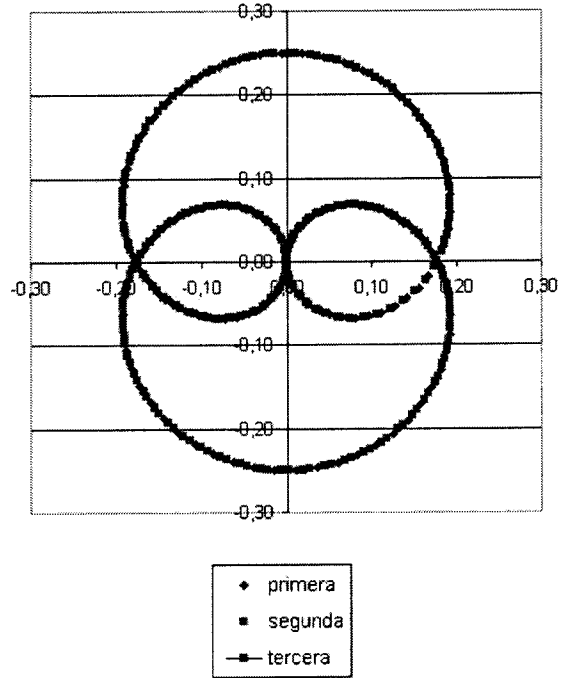


Fig. 1-A: Caso periódico

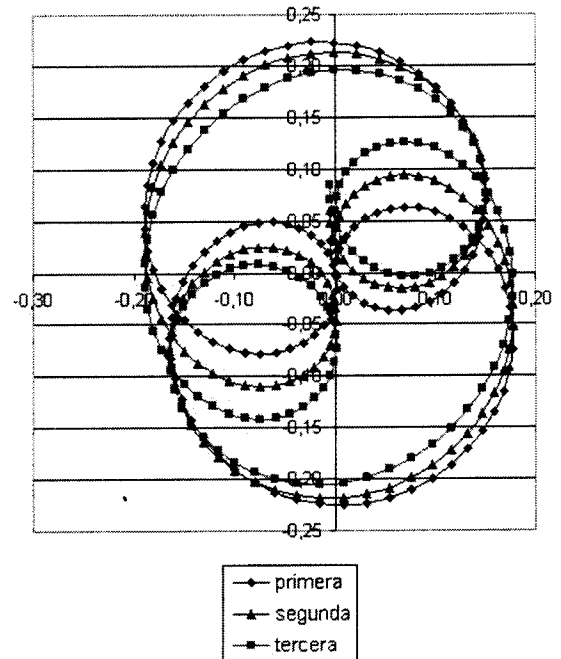


Fig. 1-B: Casos casi-periódicos

### 3. Péndulo y giroscopo de Foucault

Estos dos instrumentos fueron utilizados en el siglo 19 por Lion Foucault para probar experimentalmente la rotación de la Tierra alrededor de su eje. (ref. [3] )

#### 3.1 Movimientos del Péndulo

En el experimento de Foucault el péndulo tenía una longitud  $l=67$  metros, considerablemente mayor que la amplitud de las oscilaciones y por lo tanto se puede suponer que aproximadamente su extremo se movía en forma oscilatoria en un plano tangente a la Tierra. Pero este plano tangente se desplaza debido a la rotación de la Tierra respecto a su eje. Este desplazamiento instantáneo puede descomponerse primero en una traslación paralela a la tangente al paralelo geográfico más una rotación alrededor de un eje paralelo al eje terrestre en el lugar de la experiencia. La traslación no tiene efecto dinámico; queda la rotación que se puede considerar descompuesta en una rotación alrededor de un eje tangente al meridiano del lugar y otra normal alrededor de la dirección normal al plano horizontal. La primera se compone con un movimiento oscilatorio armónico del péndulo con el efecto lateral de la rotación de la Tierra y la segunda significa simplemente una rotación aparente del eje tangente al meridiano.

Mediante un proceso similar al de la Sección 2 se puede obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento aparente del péndulo con referencia a los ejes cartesianos  $(x,y)$  en las direcciones tangentes al meridiano y al paralelo del lugar geográfico de la experiencia. Dichas ecuaciones son

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega \sin \eta - \frac{g}{l}x, \quad \ddot{y} = -2\dot{x}\omega \sin \eta - \frac{g}{l}y \quad (19)$$

donde  $\omega = \frac{2\pi}{86400 \text{ seg}}$  es la velocidad angular de la rotación terrestre,  $\eta$  es la latitud geográfica del lugar,  $g$  es la aceleración geocéntrica de la gravedad y  $l$  la longitud (67 m) del péndulo.

Estas mismas ecuaciones están demostradas en los tratados clásicos de la Mecánica Racional en base a la teoría dinámica de Lagrange.

Esas ecuaciones pueden integrarse analíticamente por los métodos usuales para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Así, de una manera algo laboriosa, se puede demostrar que el movimiento de la proyección del péndulo sobre el plano horizontal queda definido por el par de ecuaciones

$$x_1 = r_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t + k_1), \quad y_1 = r_2 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t + k_2) \quad (20)$$

donde la dupla  $(x,y_1)$  define un sistema cartesiano congruente con el sistema  $(x,y)$  pero que gira en el plano horizontal con la velocidad angular  $\omega_1 = \omega \sin \eta$  y donde  $r_1, k_1, r_2$  y  $k_2$  son constantes arbitrarias dependientes de las condiciones iniciales del experimento.

Por ejemplo si se ponen como condiciones iniciales para  $t=0$  que el péndulo está inmóvil a una distancia  $a$  del origen de coordenadas o sea que  $x_1 = a, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = -\omega_1 a$  las coordenadas  $(x_1, y_1)$  respecto al sistema giratorio en el plano horizontal resultan

$$x_1 = a \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t), \quad y_1 = -\omega_1 a \sqrt{\frac{l}{g}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} t)$$

que definen a cada instante una trayectoria elíptica definida por la ecuación

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{gy_1^2}{\omega_1^2 a^2 l} = 1$$

Se nota que los semiejes de la elipse son  $a$  y  $\omega_1 a \sqrt{\frac{l}{g}}$  siendo el segundo muy pequeño respecto al primero; se trata pues de una elipse muy alargada que puede llegar a asimilarse a un segmento del eje  $x_1$ .

En conclusión el péndulo a partir de un cierto instante cualquiera recorre aproximadamente y durante algunas oscilaciones una elipse osculadora. Por otra parte el desplazamiento giratorio de la elipse por hora en una latitud  $\eta$  es igual a  $2\pi \sin(\eta)/24$ ; por ejemplo para una latitud  $\eta = \pi/4$  resulta aproximadamente de  $10^\circ$ .

Otra observación importante es la de que los resultados expuestos son teóricos en el sentido de haber reemplazado la esfera en que se mueve el péndulo por un plano horizontal y por otra parte se ha ignorado de detalles de la materialización del experimento, por ejemplo la parte mecánica de la unión material de la parte superior del péndulo que se supone fijo. Estos serían elementos que pueden producir en la trayectoria pendular pequeñas perturbaciones que han sido en su momento objeto de numerosos estudios por varios autores. Este mismo problema se podría tratar de otra manera en base a una teoría denominada "El problema inverso" que describiremos

y aplicaremos más adelante a problemas similares.

### 3.2 Movimientos del Giróscopo

En términos generales un Giróscopo es un cuerpo rígido, con un eje de simetría, montado en un soporte "cardan" de tal modo que dicho eje puede orientarse sin restricciones mientras el centro de gravedad del cuerpo permanece inmóvil respecto al soporte. En consecuencia la atracción gravitatoria de la Tierra se ejerce sobre el centro de gravedad y por lo tanto no existe un par de fuerzas sobre el giróscopo cuyo momento angular permanece constante; si el cuerpo se pone en rotación alrededor de su eje, éste conservará su dirección original independientemente del movimiento del vehículo que transporta el instrumento.

La rotación de la Tierra queda así demostrada por el desvío aparente del eje de rotación del giróscopo con respecto a un sistema de referencia fijo a la Tierra.

### 3.3 Movimientos del Girocompás (ref.[8])

El Girocompás es un instrumento más sofisticado donde el eje de simetría del cuerpo rotante puede quedar limitado a moverse solo en un plano horizontal. Debido a la rotación de la Tierra el plano horizontal cambia constantemente de dirección en relación a un sistema inercial de referencia; en consecuencia los soportes del montaje reaccionan sobre el cuerpo rotante en la forma de un par de fuerzas que originan un movimiento de precesión; mediante un contrapeso adecuado se puede modificar dicha precesión y lograr que el eje de rotación, o sea el vector del momento angular, tienda a alinearse con una dirección predeterminada, por ejemplo el meridiano de un lugar. El funcionamiento del instrumento está esquemáticamente descrito en la Figura 4 y está sujeto a pequeñas perturbaciones a cuyo estudio y determinación nos referiremos en las siguientes secciones.

## 4. El problema inverso en sistemas dinámicos

En relación con los temas de las secciones subsiguientes conviene detenernos en la descripción del método, desarrollado por el autor, para resolver el problema siguiente.

Consideremos un sistema dinámico representado por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la forma

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t) + P(t) \quad (21)$$

donde  $y$  e  $\dot{y}$  son magnitudes medibles;  $f(y, \dot{y}, t)$  es una función conocida dependiente de las re-

glas matemáticas que gobiernan el sistema y  $P(t)$  es una perturbación supuestamente pequeña a ser determinada en base a una sucesión de mediciones  $y(t_n)$  e  $\dot{y}(t_n)$  con  $n=1,2,\dots$  a intervalos regulares  $|t_{n+1}-t_n|=h$

Asumiendo que la solución de la ecuación (21) pueda representarse por dos términos de una serie de Taylor a partir de  $t_j$  con en el resto expresado en la forma integral resulta

$$y(t_k) = y(t_j) + (t_k - t_j)\dot{y}(t_j) + \int_j^k [f(y, \dot{y}, u) + P(u)] (t_k - u) du \quad (22)$$

Consideremos el sistema (21) sin la perturbación  $P(t)$

$$\ddot{y}^j = f(y^j, \dot{y}^j, t) \quad (23)$$

asumiendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y^j(t_j) &= y(t_j) \\ \dot{y}^j(t) &= \dot{y}(t_j) \end{aligned} \quad (24)$$

de donde resulta

$$y^j(t_k) = y^j(t_j) + h\dot{y}^j(t_j) + \int_{t_j}^{t_k} f(y^j, \dot{y}^j, u)(t_k - u) du \quad (25)$$

Comparando con (23) y en virtud de (24) obtenemos

$$y(t_k) - y^j(t_k) = \int_{t_j}^{t_k} [f(y, \dot{y}, u) - f(y^j, \dot{y}^j, u) + P(u)](t_k - u) du \quad (26)$$

Como hemos indicado las magnitudes  $y(t_k)$  se consideran conocidas y las magnitudes  $y^j(t_k)$  son soluciones de las ecuaciones diferenciales (23) que se pueden obtener mediante convenientes métodos analíticos o numéricos.

Para simplificar pondremos desde ahora

$$\begin{aligned} y(t_k) &= y_k \\ y^j(t_k) &= y_{jk} \\ R_{jk} &= y_k - y_{jk} \\ P(t_j) &= P_j \end{aligned} \quad (27)$$

La ecuación (26) se puede considerar como una ecuación integral de primera clase de Fredholm siendo la incógnita la función perturbadora  $P(t)$ . Siguiendo a Fredholm se puede re-

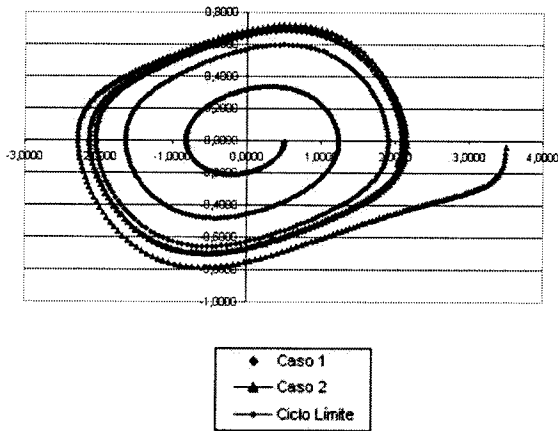


Fig. 2: Caso con ciclo limite

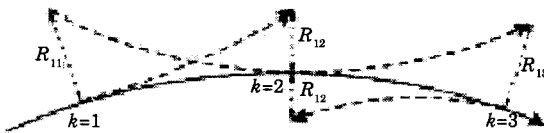


Fig. 3: Ilustración del algoritmo para calcular  $P_2$   
 ----- Trayectorias de referencia  
 ——— Trayectoria perturbada

solver asumiendo que  $P(t)$  puede representarse por una expresión polinomial con un cierto error de truncamiento; (ref. [4])

De este modo el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales algebraicas cuyas incógnitas son valores de  $P_k$  con  $k=1,2,\dots,n$  (siendo por ejemplo  $n=3$  o  $n=5$ ).

Luego el proceso puede repetirse con sucesivos conjuntos de 3 o bien 5 puntos.

El proceso comienza por considerar en la ecuación (26) como integrando la expresión entre corchetes

$$\varphi^j(u) = f(y, \dot{y}, u) - f(y^j, \dot{y}^j, u) + P(u) \quad (28)$$

En la bibliografía (ref. [6 a 13]) se puede encontrar un análisis completo de las influencias de los errores inherentes por truncamientos y por los errores de mediciones lo cual ha permitido el desarrollo de los siguientes procedimientos teóricos y numéricos tendientes a anular o bien minimizar dichas influencias. De modo que (26) toma la forma

$$R_{jk} = \int_{t_j}^{t_k} \varphi^j(u)(t_k - u) du \quad (29)$$

Consideremos tres instantes sucesivos  $t_1, t_2, t_3$  y definamos una función cuadrática de interpolación

$$z(u) = a + b(t_k - u) + c(t_k - u)^2 \quad (30)$$

tal que  $z(u) = \varphi^j(u)$  en los tres instantes.

Los coeficientes  $a, b, c$  dependen del punto de referencia  $t_k$ ; por ejemplo para  $k = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} a &= \varphi_{j1} \\ b &= \frac{1}{2h} [3\varphi_{j1} - 4\varphi_{j2} + \varphi_{j3}] \\ c &= \frac{1}{2h^2} [\varphi_{j1} - 2\varphi_{j2} + \varphi_{j3}] \end{aligned} \quad (31)$$

donde hemos puesto  $\varphi_{jk} = \varphi^j(t_k)$  con  $(k=1,2,3)$   
 Reemplazando  $\varphi(u)$  por  $z(u)$  en (29) e integrando obtenemos, para  $j=2$

$$R_{21} = h^2 \left[ \frac{1}{8} \varphi_{21} + \frac{5}{12} \varphi_{22} - \frac{1}{24} \varphi_{23} \right] + \delta I \quad (32)$$

donde  $\delta I$  es el error de truncamiento introducido al reemplazar  $z(u)$  por  $\varphi(u)$ . Ahora ponemos

$$\Delta f_{jk} = f[y_k, \dot{y}_k, t_k] - f[y_{jk}, \dot{y}_{jk}, t_k] \quad (33)$$

y

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{h^2} \quad (34)$$

Obviamente  $\Delta f_{jk} = 0$  para  $j=k$  y en virtud de (28) la ecuación (32) se reduce a la forma

$$\tilde{R}_{21} + \frac{1}{24} \Delta f_{23} - \frac{1}{8} \Delta f_{21} - \frac{\delta I}{h^2} = \frac{1}{8} P_1 + \frac{5}{12} P_2 - \frac{1}{24} P_3 \quad (35)$$

donde hemos puesto  $P_i = P(t_i)$  con  $i=1,2,3$

El mismo razonamiento puede realizarse combinando los tres puntos en varios pares diferentes, por ejemplo, como ilustra la figura (3)

$$\begin{aligned} j=2 & & k=1 \\ j=1 & & k=2 \\ j=3 & & k=2 \\ j=2 & & k=3 \end{aligned} \quad (36)$$

Se obtienen así cuatro ecuaciones lineales para  $P_1, P_2, P_3$  como sigue

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{12} & \frac{-1}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{24} \\ \frac{-1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{7}{24} \\ \frac{-1}{24} & \frac{5}{12} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{21} - \frac{1}{8}\Delta f_{21} + \frac{1}{24}\Delta f_{23} - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_{12} - \frac{7}{24}\Delta f_{12} + \frac{1}{24}\Delta f_{13} - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_{32} + \frac{1}{24}\Delta f_{31} - \frac{7}{24}\Delta f_{32} - \frac{\delta I}{h^2} \\ \tilde{R}_{23} + \frac{1}{24}\Delta f_{21} - \frac{1}{8}\Delta f_{23} - \frac{\delta I}{h^2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

donde la primera ecuación es precisamente (35).

Conviene escribir el sistema en la forma

$$MP=R \quad (38)$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  es una matriz rectangular,  $P$  es el vector de las incógnitas  $P_1, P_2, P_3$  y  $R$  es el vector de los segundos miembros de las ecuaciones (37); este sistema lineal está sobredeterminado y se puede obtener la matriz generalizada de  $M$

$$M^+ = (M^T M)^{-1} M^T \quad (39)$$

que en este caso resulta exactamente

$$M^+ = \begin{bmatrix} -0.9 & 3.7 & 1.3 & -2.1 \\ 1.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \\ -2.1 & 1.3 & 3.7 & -0.9 \end{bmatrix} \quad (40)$$

y tenemos entonces

$$P = M^+ R \quad (41)$$

como solución de cuadrados mínimos de (38).

#### Cotas superiores de errores

En la bibliografía (ref. [6 a 13]) se puede encontrar un análisis completo de las influencias de los errores inherentes por truncamientos y por los errores de mediciones lo cual ha permitido el desarrollo de los procedimientos teóricos y numéricos que hemos descrito tendientes a anular o bien minimizar dichas influencias. En suma se ha podido deducir que el error inherente al representar el integrando en la ecuación (26) por una interpolación polinómica es del orden  $O(h^4)$ .

Los errores de medición producen en los resultados errores que, en partes son proporcionales a  $\frac{1}{h^2}$  y en otras partes a  $h$ .

Esto indica que, en cuanto sea posible, para mantener esos errores dentro de límites aceptables, conviene elegir para el intervalo  $h$  un valor de compromiso. Finalmente en (40) la matriz generalizada no tiene errores y por tanto en los resultados para las incógnitas  $P$  sus errores serán de la forma

$$\delta P = M^+ \delta R \quad (42)$$

donde  $\delta R$  son los errores que afectan a las variables  $R$ .

#### Esquemas numéricos

Debido a la conocida propiedad de que en la interpolación polinómica el mínimo error inherente de truncación ocurre en el punto medio  $t_2$  resulta más conveniente calcular la perturbación correspondiente al punto medio por la simple fórmula.

$$P_2 = [1.5, -0.5, -0.5, 1.5]^T \cdot R \quad (43)$$

De esa manera se saltea el cálculo de  $P_1$  y  $P_3$ . El siguiente conjunto de tres puntos se considera superpuesto sobre dos puntos del conjunto previo y de nuevo se calcula la perturbación en el punto medio del nuevo conjunto y así siguiendo. De esta manera se reducen los efectos del error inherente aunque al costo de incrementar el esfuerzo computacional.

La ecuación (43) puede escribirse también en la forma explícita

$$P_2 = \frac{1}{24} [R_{21} + R_{32} + R_{12} + R_{23} - 6(\Delta f_{21} + \Delta f_{23}) + 2(\Delta f_{12} + \Delta f_{32}) - (\Delta f_{31} + \Delta f_{13})] \quad (44)$$

donde

$$R_{jk} = \frac{12}{h^2} (y_k - y_{jk}) \quad (45)$$

y

$$\Delta f_{jk} = f(y_k, t_k) - f(y_{jk}, t_{jk}) \quad (46)$$

Además es posible probar que una cota superior del error en  $P_2$  debido a los errores de medición resulta ser

$$|\delta P_2| < \frac{\varepsilon}{h} + h^2 \frac{|P_2^{(2)}|}{6} \quad (47)$$

donde  $\varepsilon$  es el error medido en la velocidad lo cual significa que en (47) el error de medición en posición está anulado mientras sólo influye el error en velocidad. Discusiones más refinadas se encuentran en [6,7].

#### 4. Experimentos numéricos

El objeto esencial de estos experimentos es mostrar en el caso de varios sistemas dinámicos aplicaciones del método del Problema Inverso detallado en la sección anterior. El procedi-

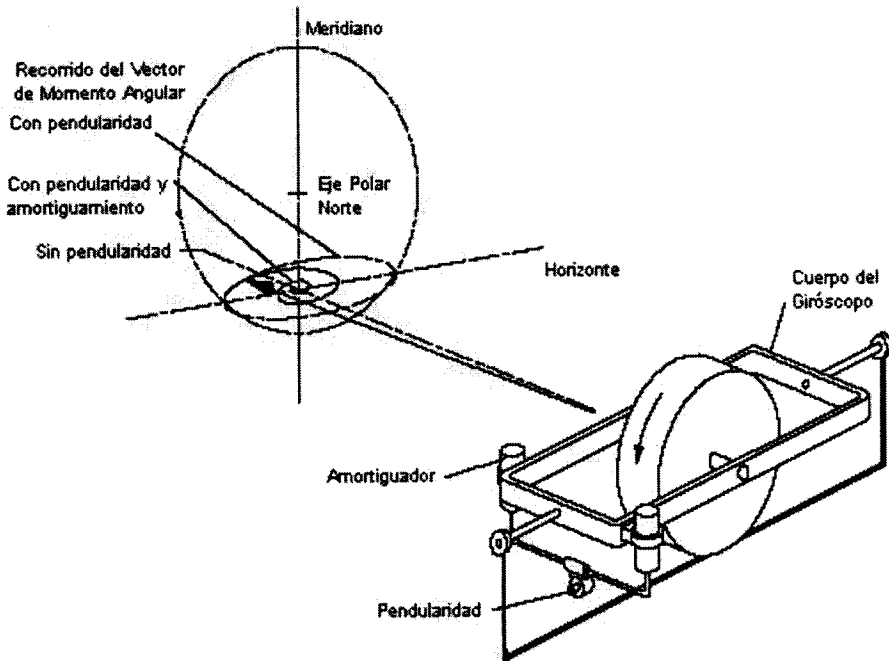


Fig. 4: Esquema del Girocompás

miento consiste en mostrar su capacidad y precisión comparando sus resultados con los de una simulación matemática del sistema dinámico en cuestión donde se determinan anticipadamente las respuestas.

#### 4.1 Movimientos planetarios

##### a) Descubrimiento de Neptuno

En el siglo 19 se observaron algunas irregularidades en el movimiento del planeta Urano con respecto a las predicciones calculadas en base a la ley de la gravitación. Dichas irregularidades tenían una magnitud mayor que los posibles errores de medición de donde surgió la hipótesis de la existencia de un planeta hasta entonces desconocido cuyas atracciones gravitatorias podrían explicar las irregularidades observadas en Urano.

Dos astrónomos, J.C. Adams en Inglaterra y U.J.J. Le Verrier en Francia, trabajando independientemente, condujeron sus investigaciones, basadas estrictamente en la ley gravitatoria. En ambos casos el método consistió en establecer, por intuición, una órbita del planeta desconocido que luego fueron ajustando hasta reducir a un mínimo la magnitud de las irregularidades observadas en el movimiento de Urano. Finalmente el planeta Neptuno fue encontrado, con error de aproximadamente 1 grado sexagesimal con res-

pecto a una posición predicha por Le Verrier en el año 1846.

Este descubrimiento fue considerado uno de los hitos más importantes en la historia de la «Mecánica Celeste»

Aspectos fundamentales de los procedimientos de Le Verrier se encuentran detallados en la clásica obra de F.Tisserand «Traité de Mécanique Céleste, vol. 1, ch. XXIII».

Sin embargo, un siglo después, con cálculos y métodos más precisos de observación, se ha podido demostrar que las órbitas y masas atribuidas a Neptuno por Adams y Le Verrier eran solo parcialmente correctas. De hecho, debido a una combinación afortunada de las condiciones dinámicas y geométricas en aquel momento, el efecto de los errores en la órbita y en la masa de Neptuno adoptadas por Le Verrier fue considerablemente reducido en la posición calculada que condujo al descubrimiento.(ref.[1])

Sigue ahora el proceso de la simulación matemática del «descubrimiento» de Neptuno como ejemplo del método del Problema Inverso que hemos desarrollado.

En este experimento introducimos la simplificación de considerar solo la interacción gravitatoria entre Urano y Neptuno omitiendo la presencia de los demás planetas del sistema solar, como lo hicieron Adams y Le Verrier; esto

TABLA I: Simulación del descubrimiento de Neptuno

| Fechas     | Pert. Simuladas       | Pert. Estimadas       | Errores |
|------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| 17/3/1981  | $4.9 \times 10^{-11}$ | $5.3 \times 10^{-11}$ | 4°18'   |
| 8/3/1985   | 7.6                   | 7.4                   | 2°72'   |
| 20/12/1989 | 10.6                  | 9.7                   | 1°20'   |
| 24/5/1994  | 12.0                  | 10.9                  | 0°31'   |
| 24/9/1998  | 10.8                  | 10.0                  | 0°38'   |
| 10/2/2003  | 8.1                   | 8.0                   | 0°32'   |

TABLA II: Simulación del descubrimiento de Neptuno

| $\frac{M_A}{M_r}$ | 0.5   | 1.0   | 2.0   |
|-------------------|-------|-------|-------|
| $\sigma$          |       |       |       |
| 0"0               | 0°82' | 0°34' | 0°32' |
| 0"5               | 0°87' | 0°40' | 0°31' |
| 1"0               | 0°91' | 0°45' | 0°30' |

marca una diferencia con el caso real que esencialmente no es significativa. Las ecuaciones del movimiento de Urano son entonces

$$\ddot{y}_1 = -k^2(1+m_1)\frac{y_1}{r_1^3} + P_y^{(1,2)} \quad (48)$$

$$y_1(t_0) = y_{10} \quad , \quad \dot{y}_1(t_0) = \dot{y}_{10}$$

donde esta ecuación responde a la forma general (21) de la teoría del problema inverso. En ella  $k^2$  es la constante de la gravitación. Debe entenderse que el símbolo  $y$  es un vector de componentes cartesianas  $x, y, z$ . Los índices 1 y 2 corresponden a los planetas Urano y Neptuno respectivamente.

La incógnita del problema es la perturbación de Neptuno sobre Urano que, teóricamente, tiene la forma

$$P_y^{(1,2)} = -k^2 m_2 \left( \frac{y_1 - y_2}{\Delta_{1,2}^3} + \frac{y_2}{r_2^3} \right) \quad (49)$$

con

$$\Delta_{1,2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (50)$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

En esta simulación matemática del problema las coordenadas cartesianas de ambos planetas y sus perturbaciones "observadas" fueron datos obtenidos de las efemérides planetarias que regularmente se publican en el Astronomical

Almanac. Luego aplicando la teoría del problema inverso descrita en la sección 4 se pudo obtener las componentes cartesianas de la perturbaciones de Neptuno sobre Urano correspondientes a varias fechas sucesivas.

En este experimento para preservar las posiciones relativas de los dos planetas similares a aquellas que ocurrieron durante las investigaciones de Le Verrier adoptamos nuestros datos del Astronomical Almanac a intervalos regulares  $h=1600$  días desde las fechas Julianas 2444680.5 (=1981, Mar. 17) hasta 2452680 (=2003, Feb. 10). Las dos últimas conjunciones (es decir la mínima distancia entre Urano y Neptuno o sea la máxima atracción perturbatoria) habían ocurrido entre los años 1822 y 1993.

Conviene notar que los períodos heliocéntricos de Urano y Neptuno son del orden aproximadamente de 82.2 y 164.4 años respectivamente.

Aplicando la teoría ya descrita del Problema Inverso se pudo obtener estimaciones de las componentes cartesianas de las perturbaciones de Neptuno sobre Urano para las fechas mencionadas más arriba cuyas magnitudes resultaron del mismo orden que las simuladas (ver la tabla 1).

Finalmente de las perturbaciones estimadas se obtuvieron coordenadas heliocéntricas  $(x_2, y_2, z_2)$  estimadas de Neptuno resolviendo las ecuaciones simultáneas (49) y (50). Estas ecuaciones son no lineales y su resolución requiere un proceso tipo *Newton-Raphson* de iteraciones convergentes. Para la masa desconocida de Neptuno

se debe adoptar un valor tentativo como procedió Le Verrier (ver la tabla 2).

Obtenidas las coordenadas heliocéntricas  $(x_2, y_2, z_2)$  se pueden transformar en coordenadas geocéntricas angulares  $(\alpha, \delta)$  aplicando las conocidas fórmulas

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = y_2 + Y = \eta; \quad \rho \sin \delta = z_2 + Z = \varsigma \quad (51)$$

donde  $\rho$  es la distancia geocéntrica de Neptuno y  $X, Y, Z$  son las coordenadas geocéntricas del Sol; se obtienen entonces:

$$\tan \alpha = \frac{\eta}{\chi}; \quad \tan \delta = \frac{\varsigma}{\sqrt{\chi^2 + \eta^2}} \quad (52)$$

Si indicamos con  $\Delta\alpha, \Delta\delta$  las diferencias de estos valores estimados con los que resultan del modelo matemático simulado se puede obtener el error angular sobre la esfera celeste entre la posiciones estimada y simulada calculándolo por la expresión

$$ERROR = \sqrt{((\cos \delta \cdot \Delta\alpha)^2 + (\Delta\delta)^2)} \quad (53)$$

En las tablas 1 y II se da un resumen de nuestros resultados. En la tabla I se dan los resultados correspondientes a una sucesión de fechas desde los años 1981 a 2003 a intervalos regulares de  $h=1600$  días. En este caso se agregaron a los datos de las observaciones simuladas errores al azar correspondientes a un desvío standard de  $0.5''$ .

Debe notarse que los mejores resultados se obtuvieron entre los años 1985 a 1994 que son los más próximos al año 1993 cuando ocurrió la conjunción, o sea la distancia mínima entre ambos planetas, similarmente a lo ocurrido en la época de las investigaciones de Le Verrier.

En la tabla II, a doble entrada, se refiere a la fecha de 1994 y se dan los resultados correspondientes por una parte a la relación entre la masa adoptada en el cálculo para Neptuno con respecto a la masa verdadera, establecida posteriormente, y por otra a varios valores del desvío standard  $\sigma$  de los errores al azar agregados a los datos simulados. Los resultados se muestran uniformes para los distintos valores de ambas variables. En particular los distintos valores de la relación de masas producen cambios en la distancia geocéntrica calculada de Neptuno lo cual no introdujo cambios importantes en sus coordenadas esféricas. Por otra parte la fórmula (44) usada en los cálculos es poco o nada sensible a los errores

de medición en posiciones como se indicó en la fórmula (47).

Se debe destacar [2] donde con un planteo diferente desde el punto de vista matemático y con la presencia adicional de las atracciones del planeta Saturno se obtuvieron también buenos resultados.

En [9] mostramos también buenos resultados para el caso de ser Saturno perturbado por Júpiter, introduciendo la presencia adicional de los planetas Urano, Neptuno y Plutón.

#### 4.2 Otras aplicaciones

a) La ecuación de Van Der Pol tiene la forma (21)

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, t) + P(t) \quad (54)$$

donde la función perturbadora tiene la forma

$$P(t) = \mu((1 - y^2)\dot{y}) \quad (55)$$

y las condiciones iniciales son  $y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$

La propiedad fundamental es que dependiendo de  $P(t)$  y de las condiciones iniciales la solución tiende a un "ciclo límite" periódico. Las aplicaciones importantes son las de regular matemáticamente el funcionamiento de sistemas eléctricos o dinámicos. (ver fig.2)

En [10] se resuelve el problema de simular matemáticamente el problema para en base a un ciclo límite prefijado determinar numéricamente la función perturbadora y las posiciones y velocidades resultantes.

b) En el funcionamiento de un GIROCOMPÁS [8] son varias las perturbaciones que afectan a su funcionamiento. En el presente caso [11] hemos hecho un detallado estudio de las perturbaciones más importantes que son debidas a la posible asimetría de la masa giratoria y la posible flexibilidad o falta de rigidez del eje giratorio.

c) En el caso del movimiento geocéntrico de los satélites artificiales esta aplicación [13] consiste en determinar las perturbaciones ocasionadas por el frenado atmosférico y a la forma asimétrica (no esférica) del geoide terrestre.

#### Agradecimientos

Agradezco al Lic. Marcelo Suárez, actualmente miembro del personal científico de la Comisión Nacional de Actividades Espaciales, con quien realizamos el estudio del descubrimiento de Neptuno.

Agradezco a Pablo M. Zadunaisky Bustillos por su eficaz colaboración en la redacción en el sistema Word para Windows de este trabajo.

### Referencias

- [1] Brookes, C.J. "On the prediction of Neptune". *Celestial Mechanics*, 3, pp. 67-80
- [2] Brunini, A. "Estimaciones numéricas de perturbaciones en Mecánica Celeste(1988)". Tesis Doctoral en Astronomía, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Univ. Nac. de La Plata, Argentina.
- [3] Goldstein, H. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Publishing, Co. (1957)
- [4] Kantorovich, L.V., Krilov, V.I. *Approximate methods of higher analysis, ch. II*. NewYork: Interscience Publishers, (1964)
- [5] Lequain, Y. *Aproximación de un número real por números racionales*. Instituto de Matematica Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 2001
- [6] Rodríguez, R., Zadunaisky, P.E., *A stable method to estimate perturbations in differential equations*. *Comp. Math. with Applications* (128) (1986)
- [7] Rodríguez, R. *Estimación de perturbaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias*. Tesis doctoral en Matemática Aplicada, en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina, (1987)
- [8] Wrigley, W., Hollister, W., M., Denhard, W., G. *Gyroscopic Theory Design and Instrumentation*. The M.I.T. Press, Cambridge Massachusetts, and London (1969)
- [9] Zadunaisky, P.E. *A method for the estimation of small perturbations*. S. Ferraz-Mello and P. Nacozy (Eds): *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, Universidade de Sao Paulo (1983)
- [10] Zadunaisky, P.E. *On the estimation of small perturbations in ordinary differential equations*. P. Deufhard and E. Hairer (Eds). *Numerical Treatment of Inverse Problems In Differential and Integral Equations*, Proceedings of an International Workshop in Heidelberg University, Germany; Boston, Birkhauser (1982)
- [11] Zadunaisky, P.E., Sánchez Peña, R.S. *Estimation of small perturbations in an inertial sensor*. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics* (11) (1988)
- [12] Zadunaisky, P.E. *The inverse problem in ordinary differential equations*. Proceedings of a Conference on Computational Ordinary Differential Equations, University of London, Oxford; Clarendon Press, (1989)
- [13] Zadunaisky, P.E. *Small Perturbations on Artificial Satellites as an Inverse Problem*. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. Vol. 39, N° 4 (2003) (pp. 1270/1276)

Manuscrito recibido y aceptado en marzo de 2004.