1 Sistemas mecánicos

Dado que en las ecuaciones ordinarias la variable independiente puede interpretarse como el tiempo y que, de esta manera, es posible aplicar sus resultados teóricos para resolver problemas físicos concretos –como lo son resolver la ecuación de movimiento de un sistema mecánico o el movimiento de cargas en un circuito– decidimos *actualizar* tal aplicabilidad. Comenzamos, entonces, por resolver algunos sistemas mecánicos cuya resolución sólo involucra la utilización del método de separación de variables. Ciertamente, el conocimiento de los principios básicos de la mecánica newtoniana facilita tanto la obtención de los resultados como la interpretación de los mismos; no obstante, ningún conocimiento previo es asumido. Finalmente queremos señalar que, dentro de nuestras limitaciones, trataremos de poner en evidencia cómo las soluciones obtenidas **dependen** de los parámetros; así, a lo largo del curso, prestaremos especial atención a **todas** las situaciones posibles: los péndulos podrán tener oscilaciones *grandes*, podrán incluso tener movimientos tridimensionales, las masas dejarán de ser unitarias (sic), etc.

En la presente sección (x, y, z) representerán las coordenadas –en un sistema **cartesiano** y **fijo**– del vector posición y t representará el tiempo. (Cuando el movimiento tenga lugar en un plano la representación en coordenadas será (x, y) y cuando lo sea en una recta, x.) En tal sistema, las ecuaciones de Newton serán:

$$m\ddot{x} = F_1 \tag{0.1}$$

$$m\ddot{y} = F_2 \tag{0.2}$$

$$m\ddot{z} = F_3 \tag{0.3}$$

donde $F_j = F_j(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ son las coordenadas del vector fuerza –que depende, en principio, del tiempo, de la posición y de la velocidad–.

Ejercicio 1 *Tiro oblicuo*

Sea

$$V(x, y, z) = mgz \tag{0.4}$$

la energía potencial de una partícula de masa m que se mueve sometida a la acción gravitatoria terrestre, dada por $F = -\nabla V$, cuya constante está dada por g. Sea, además,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{0.5}$$

la energía cinética y

$$E = T + V \tag{0.6}$$

la energía mecánica total, que supondremos **constante**.

- Considerar el caso $\dot{x} \equiv 0 \equiv \dot{y}$.
  - Considerar la ley de conservación dada por la identidad (0.6) y usar el método de separación de variables para resolver la ecuación de movimiento $z(t)$.

- Describir cualitativamente el movimiento para cada valor de los datos iniciales y de los parámetros.
- Suponer que $\dot{z}(0) > 0$ y hallar el tiempo que tarda la partícula en llegar a la posición máxima. ¿Hacia dónde apunta el eje z?
- En la situación del punto anterior hallar el tiempo que tarda en regresar al punto de partida.
- Verificar que los valores hallados en los puntos anteriores sólo dependen de $\dot{z}(0)$. Verificar, además, que uno es el doble del otro. Situaciones, ambas, que serán retomadas más adelante.

- Considerar ahora el caso general.
  - Escribir las ecuaciones de Newton (0.1) para verificar que $\dot{x} \equiv \dot{x}(0)$; $\dot{y} \equiv \dot{y}(0)$. Concluir que en el punto 1 basta con tomar $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.
  - Caracterizar **todas** las trayectorias en función del dato inicial.

NOTA: La ecuación de movimiento de una partícula que cae por acción de la gravedad y la descripción de la trayectoria en un tiro oblicuo fueron demostradas por Galileo (ca. 1638). Ver SOBRE EL MOVIMIENTO LOCAL, Teorema II Proposición II; SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES, Teorema I Proposición I.

Ejercicio 2 *Oscilador 1–D*

Sea ahora $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde $k > 0$.

- Usar el método de separación de variables para resolver la ecuación de movimiento $x(t)$.
- Describir cualitativamente el movimiento para cada valor de los datos iniciales y de los parámetros. Analizar los casos $\frac{m}{k} \to 0$ y $\frac{m}{k} \to +\infty$.
- Hallar la amplitud en función de E, m, k. Verificar que la frecuencia de oscilación es **independiente** de los datos iniciales.

Ejercicio 3 *Pequeñas oscilaciones de un péndulo plano*

En un sistema de coordenadas polares adecuado la energía potencial gravitatoria (0.4) adopta la forma $V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$ mientras que la energía cinética (0.5) se escribe $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$, donde l es la longitud del *hilo*. De donde resulta la siguiente expresión para la energía mecánica total

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) . \tag{0.7}$$

- Verificar que $E = 0$ es el valor mínimo para la energía.
- Resolver la ecuación de movimiento $\theta(t)$ para $E = 0$.
- Considerar la ecuación de la energía y reemplazar la energía potencial $1 - \cos(\theta)$ por el correspondiente polinomio de Taylor de orden 2 en el origen y verificar que la ecuación obtenida coincide con la del oscilador unidimensional.
- Usar el ejercicio correspondiente para hallar la frecuencia de oscilación en función de los parámetros –el mismo ejercicio afirma que la frecuencia es independiente de los datos iniciales–.

Ejercicio 4 La circulación de cargas en un circuito RLC está modelada por la ecuación diferencial $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V(t)$, donde L es la autoinductancia de la bobina, R es la resistividad del resistor, C es la capacidad del capacitor y V es una fuente. Supongamos que no hay fuentes y que en el instante inicial cerramos el circuito –es decir, $V(t) \equiv 0$ y $\dot{q}(0) = 0$–. Considerar el caso $CL = 1\,\mathrm{seg}^2$, $\frac{R}{L} = 2\,\mathrm{seg}$ y hallar el tiempo que tarda el dispositivo en disipar el 99 % de la carga inicial.

Ejercicio 5 Consideremos ahora el caso $L \equiv 0$, $V(t) = t\,\mathrm{volt\,seg}^{-1}$ y $C = 10^{-5}\,\mathrm{farad}$. Sabiendo que el dispositivo está descargado hallar la resisitividad necesaria para acumular una carga $q = 7 \times 10^{-8}\,\mathrm{coul}$ en $10^{-2}\,\mathrm{seg}$.

2 Resolución de ecuaciones de primer orden

Ejercicio 6 *Separación de variables*

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones en función de los datos iniciales.

(a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t}$

(b) $\dot{x} = \dfrac{t^2}{x}$

(c) $\dot{x} = \dfrac{1+t}{1-x}$

(d) $\dot{x} = t\,e^x$

(e) $\dot{x} = t^2 \operatorname{sen} x$

Ejercicio 7 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones en función de los datos iniciales. Sugerencia: usar el teorema de la función implícita.

(a) $\dot{x} = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) $\dot{x} = \dfrac{1}{x^2-1}$

(c) $\dot{x} = x\,e^{-t^2}$

(d) $\dot{x} = \ln(x)\,\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

Ejercicio 8 *Ecuaciones homogéneas*

Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

(a) $\dot{x} = \dfrac{x}{t} + \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$

(b) $\dot{x} = -\dfrac{t+x}{t}$

(c) $tx^2dx = (t^3 + x^3)dt$

Ejercicio 9 *Ecuaciones lineales*

Sean $a(t),\ b(t) : I \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas, donde I es un intervalo alrededor de t_0.

(a) Usando el método de separación de variables hallar la solución general de la ecuación lineal homogénea de orden 1: $\dot{x} + a(t)\, x = 0$.

(b) Usando el método de variación de las constantes hallar una solución particular para la ecuación no homogénea: $\dot{x} + a(t)\, x = b(t)$.

(c) Obtener la siguiente expresión para la solución de la ecuación anterior sujeta a la condición inicial $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}\, x_0 + e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(r)\, dr}\, b(s)\, ds\,.$$

Ejercicio 10 *Coeficientes indeterminados*

Usando el método de los coeficientes indeterminados obtener una solución particular para cada una de las siguientes ecuaciones no homogéneas. Hallar, además, la solución general en función de los datos iniciales.

(a) $\dot{x} - x = t^2$

(b) $\dot{x} + 2x = t^4$

(c) $\dot{x} + x - e^{-2t} = 0$

(d) $\dot{x} + x - \operatorname{sen} t = 0$

Ejercicio 11 *Análisis cualitativo*

Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dr}{d\theta} = P(r)$ donde (r, θ) son las coordenadas polares en el plano. Para cada uno de los siguientes casos analizar el comportamiento cualitativo de la solución en función de los parámetros –$a, L, M \in \mathbb{R}$– y de las condiciones iniciales.

(a) $P(r) \equiv a$

(b) $P(r) = a\, r$

(c) $P(r) = a\, r\, (r - L)$

(d) $P(r) = a\, r\, (r - L)\, (r - M)$