1 Sistemas dinámicos discretos

Ejercicio 1 Para cada una de las siguientes fórmulas de recurrencia (autónomas) encontrar el tiempo de vida, decidir si la sucesión es convergente u oscilante (si fuera posible, hallar el límite o el período) y observar la dependencia o no en los datos iniciales (y en los parámetros, si los hubiera).

- $F_1(x) = ax$
- $F_3(x) = 1 - x$.
- $F_4(x) = \ln(x)$.
- $F_5(x) = |\ln(x)|$
- $F_6(x) = \left|1 - \dfrac{1}{x}\right|$
- $F_7(x) = x^2$
- $F_8(x) = 4x^3 - 3x$
- $F_9(x) = ax(1-x)$. Elegir diferentes valores de $a \in [1,4]$. Un clásico!
- $F_{10}(x) = \begin{cases} 10(1-x) & x \in [0,1] \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

Ejercicio 2 Demostrar que las sucesiones producidas por la fórmula de recurrencia F_{10} del ejercicio anterior son acotadas cualquiera sea el dato inicial.

Ejercicio 3 Usar el método del punto fijo para hallar las dos soluciones de la ecuación $x^x = 0{,}7$

Ejercicio 4 Demostrar la siguiente versión del teorema del punto fijo.Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua que verifica $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Demostrar que la sucesión producida por el método de punto fijo converge al único punto fijo de f cualquiera sea el punto inicial $x_0 \in [a,b]$.

Ejercicio 5 Considerar la función $f(x) = x - \frac{1}{3}(x-1)^3$ en $[0,2]$.

- Verificar que $|f'(x)| < 1$ para todo $1 \neq x \in [0,2]$ pero que no existe $0 < \lambda < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.
- Verificar que f satisface las hipótesis del teorema anterior en el intervalo $[0,2]$.
- Verificar que la sucesión de errores $e_n = x_n - r$, donde $r = 1$ es el punto fijo, satisface $\frac{e_{n+1}}{e_n} \to 1$ y concluir que el método iterativo produce sucesiones que se estacionan *lejos* del punto fijo. (Realicen las iteraciones con EXCEL o con Matlab comenzando en $x_0 \in [1{,}000001; 1{,}00001]$ calculen además e_n y $\frac{e_{n+1}}{e_n}$.)

2 Lipschitz. Intervalo maximal. Unicidad

Ejercicio 6 Verificar que si $f : I \times U \to X$ es diferenciable y satisface la condición de Lipschitz con una constante L entonces $\|Df\| \leq L$. Luego, la condición de Lipschitz implica que la derivada es acotada.

Ejercicio 7 *Ecuación de Volterra*

Sean I, J intervalos alrededor de t_0 y sea U un entorno de x_0, y consideremos la siguiente ecuación integral –llamada ecuación de Volterra–:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))\, ds\,. \tag{1}$$

- Verificar que si $f : I \times J \times U \to X$ es una función continua y localmente Lipschitz en la tercer variable entonces la ecuación integral admite solución única.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))\, ds\,. \tag{2}$$

- Verificar que si $x : I \to U$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(I)$ entonces $x \in C^1(I, U)$.
- Poner $f(t, s, x) = e^{t-s}\, h(x)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface x. Comparar con la expresión del ejercicio 9 de la práctica 1.

Ejercicio 8 Revisar la demostración de la existencia –vía teorema del punto fijo– y deducir que si la condición de Lipschitz es **global** entonces la solución está definida para todo tiempo.

Notación: el intervalo maximal de existencia de una solución será notado $(T^-; T^+)$. Cuando $T^+ = -T^- = +\infty$ diremos que la solución está definida globalmente.

Ejercicio 9 A partir del ejercicio anterior concluir que si existe un compacto K tal que para todo $t \in (T^-, T^+)$ se verifica $x(t) \in K$ entonces la solución está definida globalmente.

Ejercicio 10 Supongamos que existe una función $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\|x(t)\| \leq h(t)$ demostrar que $x(t)$ está dfinida globalmente.

Bueno, si me preguntan bajo qué condiciones existe una tal función h yo les digo que miren el ejercicio siguiente.

Ejercicio 11 Demostrar que si f verifica la estimación $\langle f(x)\,;\, x\rangle \leq C\|x\|^2$ para alguna constante C entonces el lema de Gronwall ofrece la función h; concluir que, en tal caso, las soluciones están globalmente definidas.

Y ya que hablamos del lema de Gronwall, demostrar la siguiente versión generalizada.

Lema 1 Lema de Gronwall

Sea $z(t)I \to [0, +\infty)$ *tal que* $z(t) \leq z_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\, z(s)\, ds$, *demostrar la siguiente estimación*

$$z(t) \leq z_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}. \tag{3}$$

Ejercicio 12 Concluir que en el ejercicio 11 puede reemplazarse la constante C por una función continua $C(t)$.

Ejercicio 13 Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable y que, además, es periódica de período τ en la primer variable –esto es, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo vale $f(t + \tau, x) = f(t, x)$– y sea $x(t)$ una solución para la ecuación $\dot{x} = f(x)$ que verifica $x(0) = x(\tau)$ demostrar que $x(t)$ es periódica.

Ejercicio 14 Supongamos que $f : I \times (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable y sea $x(t)$ una solución para la ecuación $\dot{x} = f(x)$ para la cual existe $\lim\limits_{t \to T^+} x(t) = L$. Demostrar que

- Si $T^+ = +\infty$ entonces $f(L) = 0$.
- Si $T^+ < +\infty$ y $(a, b) = \mathbb{R}$ entonces $L = +\infty$.
- Si $T^+ < +\infty$ y (a, b) es acotado entonces $L \in \{a, b\}$.

Ejercicio 15 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua localmente Lipschitz para la cual existen $a < b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$.

- Demostrar que si $x(t)$ es la solución de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ que verifica $x(0) \in (a, b)$ entonces $x(t) \in (a, b) \forall t \in (T^-, t^+)$. En esta situación diremos que el conjunto (a, b) es invariante por el flujo.
- Concluir que el compacto $[a, b]$ es invariante y utilizar el resultado del ejercicio 9 para concluir que las soluciones que comienzan en $[a, b]$ están definidas globalmente.

Ejercicio 16 Demostrar el siguiente criterio de unicidad. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y no creciente entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &\in I \end{cases}$$

satisface unicidad. Sugerencia: analizar la evolución del error $|x_1(t) - x_2(t)|$.

Ejercicio 17 *Sobre la no unicidad*

Consideremos una función $f[0, \delta) :\to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0,\ f'(0) = +\infty,\ f \in C^1((0, \delta)$ y $\frac{1}{f} \in L^1[0, \delta)$. Un ejemplo es la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La intención es demostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

no satisface unicidad; para lo cual proponemos.

- Tomar $F(z) = \int_0^z \frac{1}{f}$ y verificar que F es inversible.

  Observar que según el método de separación de variables, el candidato a solución es la función inversa de F.
- Verificar que $x(t) = F^{-1}(t)$ es, efectivamente, solución del problema.
- Concluir que no hay unicidad.
- Más aún, verificar que, para cada t_0 la función

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ \\ F^{-1}(t - t_0) & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

  también es solución.

Ejercicio 18 Consideremos la ecuación $\dot{x} = x - \sqrt[3]{x}$.

- Demostrar que, cualquiera sea el dato inicial, el correspondiente problema de valores iniciales admite solución única.
- Halar los puntos de equilibrio.
- Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ decidir si $T^+(x_0)$ y $T^-(x_0)$ son finitos o no.

Ejercicio 19 Método de Euler: ponerlo y vincularlo con la definición de exponencial.

Ejercicio 20 Sean I un intervalo alrededor de t_0 y K un entorno compacto de x_0. Sean, además, $f_n, f_0 : I \times K \to X$ una sucesión de funciones que satisfacen la condición de Lipschitz con constantes L_n. Consideremos, finalmente, las sucesiones $t_n \to t_0$ y $x_n \to x_0$ y la sucesión $x_n(t) : I \to K$ de soluciones para el problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u & = f_n(t, u) \\ \\ u(t_n) & = x_n \, . \end{cases}$$

- Demostrar que si $f_n \rightrightarrows f$ y f es localmente Lipschitz, con constante L_0, entonces existe L tal que L_n, $L_0 \leq L$ y $x_n \rightrightarrows x$ donde x es la única solución del problema *límite* $n = 0$.
- Demostrar que si f no es localmente Lipschitz entonces existe una subsucesión $x_{n_k} \rightrightarrows x$ tal que el límite x satisface la ecuación integral.

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Ejercicio 21 Poner el del logaritmo. Insertar la nota histórica y deducir la ecuación para el antilogaritmo poner un

Ejercicio 22 Caracterizar la familia de curvas para las cuales existe una dirección tal que si dos rayos paralelos a la misma inciden sobre la curva entonces se reflejan en un punto común.

Ejercicio 23 Caracterizar las curvas para las cuales todas las rectas normales concurren en un punto.

Ejercicio 24 Considerar la familia de curvas $\{y = k\, e^x : k \in \mathbb{R}\}$. Hallar la familia de curvas $\{g(x, y) = c : c \in \mathbb{R}\}$ que es *ortogonal* a la familia anterior; es dcir, en los puntos comunes las curvas son perpendiculares.