

1 FLUJOS

Ejercicio 1 Considerar el campo de velocidades dado por $f(x) = \sin(x)$.

- Hallar los puntos de equilibrio.
- Verificar que define un flujo global.
- Trazar, cualitativamente, un mapa con algunas líneas de flujo.
- Demostrar que la familia de funciones $\phi(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite cuando $t \rightarrow +\infty$. Hallar la función límite $\phi_{\omega+}$ y verificar que la convergencia no es uniforme.

Ejercicio 2 Considerar un campo de velocidades $A(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2})$. Sea $U(s, t)$ la única solución del problema $\dot{X} = A(t)X$ sujeto a la condición inicial $X(s) = \mathbb{I}$.

- Verificar que cualesquiera sean $r, s, t \in \mathbb{R}$ vale $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$.
- Verificar que cualesquiera sea $s, t \in \mathbb{R}$ vale que $\Sigma(U(t, s)) \subseteq (0, +\infty)$.
- Verificar que la única solución del problema no homogéneo $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ con dato inicial $y(s) = y_0$ está dada por la fórmula (de Duhammel) –comparar con el ejercicio (??) de la práctica 1–.

$$y(t) = U(t, s)y_0 + \int_s^t U(t, r)f(r)dr.$$

- Verificar que si $A(t+\tau) = A(t)$ entonces existe una matriz periódica $V(t)$ y una matriz constante R tales que $U(t) = V(t)e^{Rt}$.

2 MÁS SISTEMAS MECÁNICOS

Ejercicio 3 Consideremos una partícula de masa m que se mueve sobre la superficie de un cilindro de eje vertical y de radio R , por la acción de la gravedad cuya ecuación, en un sistema de coordenadas cilíndricas adecuado, estará dada por:

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \ddot{z} = -g.$$

- ¿Cuáles son los posibles valores del vector velocidad inicial?
- Describir cualitativamente el movimiento para cada uno de ellos y resolver la ecuación de movimiento.

Ejercicio 4 *Cuerpo rígido*

La intención del ejercicio es mostrar que los movimientos de giro de un cuerpo rígido alrededor de los ejes principales de inercia correspondientes a los momentos mayor y menor son estables. Para ello consideremos las ecuaciones de Euler:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \tag{1}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \tag{2}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2), \tag{3}$$

donde I_j es el momento de inercia correspondiente al j -ésimo eje principal de inercia y $(\omega_j)_{j=1,2,3}$ son las coordenadas del vector velocidad angular en ese sistema.

- Verificar que el movimiento de giro alrededor de un eje principal es de equilibrio.
- Linealizando la ecuación alrededor de los equilibrios hallados en el punto anterior, analizar la estabilidad de los mismos.

Ejercicio 5 Consideremos el siguiente potencial, asimétrico,

$$U(x) = \begin{cases} k_1 x^2 & x > 0 \\ k_2 x^2 & x < 0 \end{cases}$$

donde $0 < k_1 < k_2$.

- Dar las posiciones máxima y mínima, de una solución que comience en el origen, para cada valor de la energía.
- El valor esperado para la posición en un semiperíodo T está dado por la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

A pesar de que el período no depende de la energía ¿por qué?, hallar $\bar{x}$ y mostrar que $\bar{x} = \bar{x}(E)$. ¿Qué pasa con $\bar{x}(E)$ cuando E crece? ¿y cuando $E \rightarrow +\infty$?

3 DEPENDENCIA EN LOS DATOS INICIALES

Ejercicio 6 La posición de un cuerpo que cae verticalmente en un medio cuya resistencia puede considerarse pequeña y dependiente de la velocidad está dada por la ecuación $\ddot{z} = -g + \varepsilon F(\dot{z})$ donde g es la constante gravitatoria y $\varepsilon \ll 1$. Suponer que $F(v) = \frac{Mv}{1+v}$, $M > 0$ fijo, y usar la dependencia en los parámetros para describir el movimiento.

Ejercicio 7 Supongamos ahora que dejamos caer un cuerpo desde $1000m$ de altura pero no tomamos en cuenta la resistencia del aire. A medida que el cuerpo cae, el movimiento se ve afectado por la fuerza de Coriolis, que depende de la velocidad a través de la fórmula: $F = 2m \vec{r} \wedge \Omega$, donde Ω es el vector velocidad angular de la Tierra, $|\Omega| = 7,3 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$. Suponiendo que el experimento se realiza en la Sierra de la Ventana, cuya latitud aproximaremos en 39° , y tomando a Ω como un pequeño parámetro estimar cuánto se aleja de la vertical el cuerpo al tocar el piso.

Ejercicio 8 *No tan pequeñas oscilaciones del péndulo plano*

Consideremos la ecuación del péndulo plano $m l^2 \ddot{\theta} - m g l \sin(\theta) = 0$. Sabemos por el ejercicio (??) de la práctica (??) que para pequeñas oscilaciones, el período es independiente tanto de la masa como de la amplitud inicial. La intención de este ejercicio es obtener cómo el período depende de la amplitud en los casos en los que ésta es pequeña pero no tanto. Para eso sugerimos.

- Considerar los datos iniciales $\theta(0) = A$ y $\dot{\theta}(0) = 0$.
- Usar la dependencia diferenciable en el dato inicial para representar la solución como una serie de potencias de A . Sugerencia: Utilizar el desarrollo hasta orden 3.

- Usar que para $A = 0$ el período es $\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ y representar $\tau = \tau_0 + \delta$. Obtener una ecuación para el período τ –en términos de δ – como función de A . Sugerencia: usar que $\dot{\theta}(\tau) = 0$.
- Usando el teorema de la función implícita obtener una expresión para el período de la forma: $\tau(A) = \tau_0(1 + \delta(A)) + o(A^2)$. La paridad de $\tau(A)$ permite reemplazar $o(A^2) = O(A^4)$.

Ejercicio 9 *Oscilador anarmónico*

Razonando como en el ejercicio anterior obtener la dependencia del período τ en la amplitud A para el oscilador anarmónico dado por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 x + ax^2 + bx^3 = 0.$$