ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - Prim. Cuat. 2008
Práctica 1

Ejercicio 1. *Dinámica unidimensional.* En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $\dot{x} = f(x)$, realizar el gráfico de $f(x)$, hallar los puntos de equilibrio y realizar un bosquejo de la dinámica en el eje x. A partir de esto analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(a) $\dot{x} = 1 - x^2$ (b) $\dot{x} = x^3 - x$ (c) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$

Ejercicio 2. Realizar un **gráfico aproximado** de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales.

(a) $F(x,y) = (x,y)$ (b) $F(x,y) = (-y,x)$

(c) $F(x,y) = (y,0)$ (d) $F(x,y) = (-x+2y, -2x-y)$

Ejercicio 3. Esbozar el plano de fases de la ecuación $x' = Ax$, sin resolver para,

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Considerar el sistema a un parámetro,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \lambda y \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

Ejercicio 5. Sea A una matiz diagonal de $n \times n$. Encontrar condiciones sobre A que garanticen que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$.

Ejercicio 6. Sea A una matriz de $n \times n$.

1. ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?
2. ¿Cuál es la relación geométrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?

Ejercicio 7. Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y hacer un bosquejo del diagrama de fases.

Ejercicio 8. Realizar un **gráfico aproximado** de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales.

(a) $F(x,y) = (x^2, y^2)$ (b) $F(x,y) = (x, y^2)$

(c) $F(x,y) = (x, x^2)$ (d) $F(x,y) = (1, x+y)$

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales hallar los puntos de equilibrio y **esbozar** el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$

Ejercicio 10. *Modelos de crecimiento poblacional.* Considere los siguientes modelos de crecimiento de poblaciones, interprételos y realice el correspondiente diagrama de fase (de manera aproximada).

1. Modelo de Malthus o de tasa constante. Si $r \in \mathbb{R}$
$$x'(t) = rx(t)$$
2. Modelo de Verhulst o de crecimiento logístico. Si $r \in \mathbb{R}$ y $K > 0$
$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$
3. Modelo de Volterra para dos especies (predador-presa). Si a, b, c y d son constantes positivas, x es la población de presas e y la de predadores
$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,(a - cy) \\ \dot{y} &= y\,(ex - d) \end{cases}$$
4. El Modelo de predador-presa que además contempla la fricción entre los individuos de la misma especie es
$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,(a - bx - cy) \\ \dot{y} &= y\,(-d + ex - fy) \end{cases}$$

Dinámica en un campo potencial.
Dado $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ consideremos la ecuación diferencial
$$\ddot{x} = -V'(x).$$
que toma la siguiente forma de sistema
$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -V'(x) \end{cases}$$
En mecánica $V(x)$ es el potencial y $-V'(x)$ es la fuerza.

Ejercicio 11. Demostrar que la energía
$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$
es una constante del movimiento. El primer término es el de la energía cinética y la segunda la potencial.

Ejercicio 12. Considerar $V(x) = x^2$. Esbozar un diagrama de fases para diferentes niveles de la energía $H(x, y)$. Verificar que todas las trayectorias son acotadas. Utilizar la cantidad conservada obtenida en el punto anterior para obtener la posición máxima en funcion del dato inicial. Este potencial es el del oscilador armónico, es decir un resorte sin la acción de fuerzas externas.

Ejercicio 13. $V(y) = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$ es el potencial que da origen a la fuerza a la que está sometida una masa m que cuelga de un resorte con costante k (llamamos y a la posición justamente porque el movimiento se desarrolla en sentido vertical). Compare este caso con el del ítem anterior.

Ejercicio 14. $V(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$, con $x > 0,\ a > 0$. Esbozar el diagrama de fases para diferentes niveles de la energía. Describir cualitativamente el movimiento para valores iniciales tal que la energía sea positiva, negativa o nula. Se trata del movimiento radial de una partícula sometida a un campo gravitatorio, la cantidad $\frac{1}{x^2}$ suele interpretarse como un *potencial centrífugo*, y $V(x)$ es el *potencial eficaz.*

Ejercicio 15. Considerar el potencial del punto anterior. Fijado x_0 obtener el valor mínimo de $|y_0|$ para el cual la trayectoria cuyo nivel de energía es $H(x_0, y_0)$ es no acotada. (La cantidad y_0 es la *velocidad de escape.*)

Ejercicio 16. Considerar $V(x) = 1 - cos(x)$ (el potencial asociado al péndulo). Esbozar el diagrama de fases para diferentes valores de la energía. Verificar que todas las trayectorias están acotadas en el eje y. Para cada $x_0 \in [-\pi, \pi]$ obtener la *velocidad de escape*.

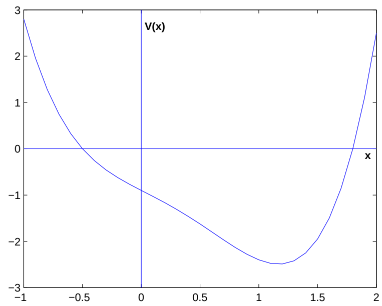
Ejercicio 17. Se lanza hacia arriba un cuerpo de masa m con una velocidad inicial v_0. Sabiendo que la fuerza gravitatoria ($F = -mg$) es conservativa.

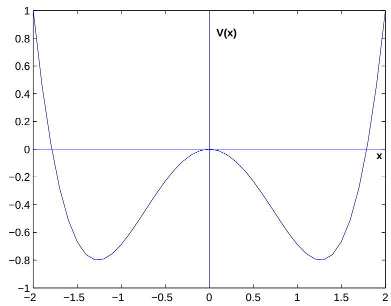
1. Hallar la energía potencial y cinética del cuerpo cuando alcanza una altura h.
2. Graficar el potencial y encontrar el valor de h donde el movimeiento cambia de dirección.

Ejercicio 18. Sea $V(x, y) = ax^2 + by^2 + x^2y$, con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Consideremos el sistema $\dot{X} = -\nabla V(X)$, donde $X = (x, y)^t$.

1. Verificar que el origen es un punto de equilibrio y clasificar su estabilidad en función de los parámetros a y b.
2. Hallar los restantes puntos de equilibrio y analizar su estabilidad.

Ejercicio 19. Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales,





Campo central de fuerzas

Ejercicio 20. Considerar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, ésto es, se considera la ecuación

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x) \quad x \in \mathbb{R}^3/\{0\}$$

donde $V(x) = V_0(|x|)$ con $V_0 \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$.

1. Probar que se conserva el momento angular, M, relativo al origen. Donde $M = x \times m\dot{x}$ (producto vectorial).
2. Mostrar que todas las órbitas son planares (en el plano perpendicular a M).
3. Probar la ley de Kepler, que dice que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales. (Sug: Usar la formula de Green $\int_{\triangle} dxdy = \frac{1}{2} \int_{\partial\triangle} xdy - ydx$ para calcular el área del triángulo curvo).