ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 2
Primer Cuatrimestre 2008
Existencia, unicidad, dominio de definición, dependencia delos parámetros, flujos.

1. Probar que las siguientes definiciones son equivalentes (cualquiera de las dos se puede tomar como la definición de una función localmente Lipschitz en la variable x en $J \times D$),
   a) Para todo intervalo abierto $I \subset J$ y B bola abierta con $\overline{B} \subset D$ existe $L > 0$ tal que para todo $t \in I$, $x_1, x_2 \in B$
   $$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$
   b) Para todo $I \subset J$ y $\Omega \subset D$ ($\overline{\Omega}$ compacto) existe $L > 0$ tal que para todo $t \in I$,$x_1, x_2 \in \Omega$,
   $$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

   Obs: En (b), I no tiene por qué ser un intervaloy Ω no tiene por qué ser una bola.

2. En cada una de las siguientes ecuaciones,

   1) $\dot{x} = \frac{x}{t}$, $\quad x(1) = 3$ $\qquad$ 2) $\log(x^2 + 1) + \frac{2x(t-1)}{x^2+1}\dot{x} = 0$, $\quad x(2) = 0$

   3) $\dot{x} = \frac{x}{2t}$, $\quad x(9) = 2$ $\qquad$ 4) $\dot{x} = \lambda x^2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ $\;x(t_0) = x_0$.

   a) Analizar la existencia y unicidad de la solución.
   b) Encontrar la o las posibles soluciones.
   c) Hallar (a, b) el intervalo maximal de definición de la solución.
   d) Analizar si existen los límites
   $$(1) \ \lim_{t \to a^+} x(t) = x_1$$
   $$(2) \ \lim_{t \to b^-} x(t) = x_2.$$
   e) Estudiar si $f(x, t)$ tiene singularidad en (x_1, a) o en (x_2, b) (considerar que x_1 y/o x_2 podrían ser ∞).

3. *a*) La función nula es solución de
   $$y' = y^{1/3} \quad y(0) = 0$$
   en la semirecta $x < 0$. Definir dos prolongaciones distintas a todala recta real que sean solución del sistema.
   b) ¿Contradice *a*) el teorema de unicidad de solución?
   c) Encontrar otra ecuación de primer orden cuya solución no sea única.

4. *a*) Probar que el problema
   $$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
   tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Hallar el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} \dot{x} = x^p \quad \text{con } 0 < p < 1 \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases}$$

c) Probar que el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

es finito si y sólo si $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds < \infty.$

5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Probar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = g(x)y, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única en cualquier intervalo donde este definida. ¿Se puede quitar la hipótesis de que alguna de ellas sea Lipschitz?.

6. Sea $f = f(t, x, \mu)$ de clase C^1 con $t \in [-a_0, a_0] \subset \mathbb{R}$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\mu \in V \subset \mathbb{R}^m$ y sea $(x_0, \mu_0) \in U \times V$. Probar que existe $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales no autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \mu) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x(t, y_0, \mu)$ con $u \in C^1(G)$ donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \times B_\delta(\mu_0)$.
Sugerencia: ampliar el sistema con una nueva variable y tal que $\dot{y} = 0$ e $y(0) = x_0$.

7. En las mismas hipótesis del ejercicio anterior, vea que el problema

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, t, \mu) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x(t, \tau, x_0, \mu)$ con $x \in C^1(Q)$ donde $Q = [-a, a] \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B_\delta(x_0) \times B_\delta(\mu_0)$.

8. Sea $f \in C^1(J \times D \times \Lambda)$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$. Sea $x(t, \xi, \lambda)$ la solución maximal de

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad , \quad x(t_0) = \xi.$$

Encontrar los problemas de valores iniciales que satisfacen$\dfrac{\partial x}{\partial \lambda_i}$.

9. (*Lema de Gronwall*) Dada f continua y dos números positivos A y B tales que

$$0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$$

entonces

$$f(x) \leq A\, e^{B(x - x_0)}$$

10. Sean $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente soluciones de los siguientes problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \dot{y} & = & g(t,y) \\ y(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Probar que si f y $g \in L^\infty$ entonces el flujo es continuo respecto al campo de velocidades (es decir que si el segundo miembro cambia poco, también variarán poco los flujos).

11. Probar que las siguientes formulas definen flujos globales en $\mathbb{R}^2$ y hacer un bosquejo del correspondiente diagrama de fases,
    a) $\varphi(t,(x,y)) = (e^t x, e^t y)$

    b) $\varphi(t,(x,y)) = (x, tx + y)$

    c) $\varphi(t,(x,y)) = (e^{-t} x, e^{-t}(tx + y))$

12. Determinar el flujo inducido por el campo $x \mapsto x^2$ sobre $E = \mathbb{R}$. ¿Cuál es el dominio Ω del flujo y $J(x)$ para $x \in \mathbb{R}$?. Si $\Omega_t := \{x \in E/\ (t,x) \in \Omega\}$, determinar Ω_t para $t \in \mathbb{R}$. Si $\varphi_t : \Omega_t \to E$, $\varphi_t(x) := \varphi(t,x)$, describir el comportamiento de las transformaciones φ_t y φ_{-t}.

13. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times D \to D$ un flujo con$D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Probar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : D \to D$ es un homeomorfismo.

14. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times D \to D$ un flujo y $p_0 \in D$. La función $\varphi(\cdot, p_0) : \mathbb{R} \to D$ es una curva continua que se llama órbita o trayectoria de p_0. A veces también se llama órbita o trayectoria de p_0 al conjunto imagen de esa función que denotaremos

$$\mathcal{O}(p_0) = \{\varphi(t, p_o)/t \in \mathbb{R}\}$$

Probar que dos órbitas distintas no se cortan.

15. Sea φ un flujo en $\mathbb{R}^n$. Probar que,
    a) El conjunto de los puntos críticos es cerrado.
    b) Si $\varphi(t,y) \to x$ cuando $t \to t^+(y)$ o $t \to t^-(y)$. Entonces x es un punto crítico.