ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 3
Primer Cuatrimestre 2008

Sistemas Lineales

1. Repaso de Análisis II

Ejercicio 1. 1. Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En b), c) y e). resolver además el problema de valores iniciales.

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

2. ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican
$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = 0?$$
¿Cuáles verifican
$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = \infty?$$
3. Esbozar los correspondientes diagramas de fases.

Ejercicio 2. Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si

a) $0 < \lambda < \mu$ b) $\lambda < 0 < \mu$ c) $\lambda = 0,\ \mu < 0$ d) $\lambda < \mu < 0$

Ejercicio 3. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + bx' + cx = 0 \quad \text{con } b, c \text{ constantes} \tag{1}$$

1. Examinando el sistema de primer orden equivalente probar que (1) tiene una única solución para toda condición inicial $x(0) = u$, $x'(0) = v$.
2. ¿Qué hipótesis sobre b y c asegura que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ para toda solución $x(t)$?

Ejercicio 4. 1. Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional
$$x' = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{2\times2}$$
y encontrar la solución general, en los siguientes casos:
a) A tiene autovalores reales de distinto signo
b) A tiene dos autovalores reales negativos (A a diagonalizable)
c) A tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
d) A tiene autovalores complejos conjugados $a \pm bi$ con $a < 0$
e) Idem d) con $a = 0$
f) Idem d) con $a > 0$
g) Idem b) con autovalores positivos
h) Idem c) con autovalor positivo

2. ¿En cuáles de los items anteriores se verifica $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$?

2. Repaso de Álgebra Lineal - Exponencial de Matrices

2.1. Definiciones:

Dadas las matrices A y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definimos

1. *Norma de* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (como operador lineal)
$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$
y por lo tanto $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.
2. *Exponencial de* A :
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$
3. *Conmutador entre* A y B:
$$[A, B] = AB - BA$$
4. *Grupos de matrices*
   - Grupo especial lineal (con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$).
   $$GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n} : A \text{ es inversible}\}$$
   - Grupo especial lineal
   $$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : det(A) = 1\}$$
   - Grupo ortogonal (matrices reales)
   $$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I\} \quad \text{(grupo ortogonal)}$$
   $$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\} \quad \text{(grupo especial ortogonal)}\}$$
   - Grupo unitario (matrices complejas)
   $$U(n) = \{A \in U(n) : A^* A = I\} \quad \text{(grupo unitario)}$$
   donde A^* denota la transpuesta conjugada de A.
   $$SU(n) = \{A \in SU(n) : \det(A) = 1\} \quad \text{(grupo especial unitario)}$$
5. A es *semisimple* si es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

2.2. Ejercicios.

Ejercicio 5. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.

Ejercicio 6. Comprobar, en cada caso, que las siguientes matrices son nilpotentes y encontrar su forma canónica de Jordan.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Dada una sucesión de matrices $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < \infty$, probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge y que se verifica que:
$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$$

Ejercicio 8. Verificar que e^A está bien definida y calcular una cota de $\left\|e^A\right\|$.

Ejercicio 9. Probar que

1. $[A,B] = \text{lím}_{t\to 0} \dfrac{e^{tA}e^{tB} - e^{tB}e^{tA}}{t^2}$
2. A y B conmutan $\Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$.
3. Si $\forall\, |t| \ll 1 : e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \Rightarrow A$ y B conmutan.

Ejercicio 10. Probar que

$$\det\left(e^A\right) = e^{Tr(A)}$$

Sugerencia: considerar la forma canónica de A.

Usando esto, probar que:

1. $\det\left(e^{tA}\right) = e^{t\ Tr(A)}$
2. Si $Tr\,(A) = 0 \Rightarrow \det\left(e^A\right) = 1$ (es decir que $e^A \in SL\,(n)$).

Ejercicio 11. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^t = -A$ (antisimétrica)$\Rightarrow e^A \in SO\,(n)$. Pero si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y $A^* = A$ (matriz hermitiana), sólo se tiene que $e^{iA} \in U(n)$.

3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Ejercicio 12.

1. Resolver la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^3$ $x' = Ax$ en los siguientes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (1,2,1)$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = (2,1,1)$$

2. Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real no positiva.

1. Si A a es semisimple, probar que toda solución de $x' = Ax$ se mantiene acotada cuando $t \to +\infty$.
2. ¿Qué sucede si A no es semisimple?

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y supongamos que todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas del mismo período. Entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $t^2 + a^2$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 15. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

1. que verifique $x(1) = 2 \quad y(1) = 7$
2. que verifique $x(1) = 0 \quad y(1) = 0$

Ejercicio 17. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

1. $y'' - 8y' + 16y = 0$

2. $y'' - 2y' + 10y = 0$
3. $y'' - y' - 2y = 0$

Ejercicio 18. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

1. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2$
2. $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{2t}$
3. $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \cos 2t$

Ejercicio 19. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = \exp(-x)$ que verifiquen:

1. $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$
2. $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$
3. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
4. $y'(0) = 1$

Ejercicio 20. Hallar los subespacios estables, inestables y centrales (E^s, E^u y E^c) del sistema lineal

$$x' = Ax \tag{2}$$

para las siguientes matrices.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d) } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En cada caso, también esbozar el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At}?

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (2) con $x(0) = x_0$. Muestre que

1. si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$;
2. si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$;
3. si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $m \le |x(t)| \le M$.

Ejercicio 22. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax + b(t) \tag{3}$$

donde $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continuo.

Ejercicio 23. Resuelva el sistema no homogéneo (3) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

Ejercicio 24. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ continua para $t \ge t_0$. Probar que si $Re(\sigma(A)) < 0$ y que si $\|B(t)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces las soluciones de

$$x' = Ax + B(t)x \tag{4}$$

verifican $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (y luego, 0 es asintóticamente estable).

Ejercicio 25. Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (4) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2 e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 26. Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$