ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 5
Primer Cuatrimestre 2008

Conjuntos Límites

1. En cada una de las siguientes ecuaciones determinar el ω-límite y el α-límite de los flujos planos

   a) $\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \dot{x} &= -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \\ \dot{y} &= x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \end{cases}$

   c) $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda \operatorname{sen} x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$ (si $\lambda = \frac{g}{l}$ estamos en el caso de un péndulo, amortiguado, de longitud l).

2. Escribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - r^2)(4 - r^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - r^2)(4 - r^2) \end{cases} \qquad \left(r^2 = x^2 + y^2\right)$$

   en coordenadas polares. Dibujar el diagrama de fases y determinar los conjuntos límite de las trayectorias del sistema. Mostrar que este sistema tiene dos ciclos límite Γ_1 y Γ_2. Hallar Γ_1 y Γ_2 y determinar su estabilidad.

3. Determinar el ω-límite y el α-límite de los flujos tridimensionales

   a) $\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\,(1 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \dot{y} &= x + y\,(1 - x^2 - y^2 - z^2) \\ \dot{z} &= 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y\,(1 - x^2 - y^2) \qquad \text{con } \alpha > 0. \\ \dot{z} &= \alpha \end{cases}$

   c) Considerar el cilindro sólido de radio unitario dado por $\Omega = \{(x, y, z)/\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } 0 \leq z \leq 2\pi\}$. Si identificamos los puntos $(x, y, 0)$ y $(x, y, 2\pi)$ tenemos que el cilindro se transforma en un toro sólido. Con esta identificación el flujo del sistema del ítem $(3b)$ se identifica con un flujo tridimensional dentro del toro.

      1) El eje z del cilindro se transforma en una curva cerrada, ¿qué puede decir acerca de su estabilidad?. ¿A dónde tiende una solución que comienza en un punto cercano a esta curva?, ¿cómo se comporta?.

2) Considere ahora el flujo del sistema ($3b$) restringido a la superficie del cilindro y, vía la anterior identificación, tenemos un flujo dentro de la superficie toroidal. Determine como es el $\omega-$límite de estos flujos dependiendo del valor de $\alpha \geq 0$.

4. La ecuación de Lienard

$$(\mathrm{L}) \begin{cases} \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -x \end{cases} \qquad \text{con } f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

(o equivalentemente, $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + x = 0$) juega un importante rol en la teoría de circuitos eléctricos. (Como caso especial, uno obtiene la ecuación de Van der Pol si $f(x) = \mu(x^3 - x)$, $\mu >> 1$).

a) Si se tiene que $f'(0) \neq 0$, determinar la estabilidad de los puntos estacionarios de (L) en función de $f'(0)$.

b) Si se tiene que $xf(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, mostrar que el origen $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable. (Sug: puede ser útil saber que $x^2 + y^2$ puede interpretarse como la energía).

c) (*Optativo*) Graficar usando algún programa algunas soluciones de la ecuación de Van der Pol.

5. Dado un flujo plano, hacer un esquema del diagrama de fases de los siguientes casos:

a) Una trayectoria Γ con $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma) = \{x_0\}$, pero $\Gamma \neq \{x_0\}$.

b) Una trayectoria Γ tal que $\omega(\Gamma)$ consiste en una órbita límite.

c) Una trayectoria Γ tal que $\omega(\Gamma)$ consiste en una órbita límite y un punto de equilibrio.

d) Una trayectoria Γ tal que $\omega(\Gamma)$ consiste en dos órbitas límite y un punto de equilibrio.

e) Una trayectoria Γ tal que $\omega(\Gamma)$ consiste en dos órbitas límite y dos puntos de equilibrio.