ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 6
Primer Cuatrimestre 2008

Soluciones Periódicas - El Teorema de Poincaré-Bendixon - Teorema de Lienard

Nota: Intente hacer los ejercicios 7 y 8 **sin** usar el Teorema de Poincaré Bendixson.

1. Para cada $\alpha \geq 0$ Considerar el sistema plano descripto en coordenadas polares por
$$\begin{cases} \dot{r} &= r.f\left(r^2\right) \\ \dot{\theta} &= \left(r^2-1\right)^2 + \operatorname{sen}^2(\theta) + \alpha \end{cases}$$
con $f(1) = 0$ y $f'(r) < 0$. Estudiar el $\omega-$ límite dependiendo del valor de α.

2. Considere el sistema plano descripto en coordenadas polares
$$\begin{cases} \dot{r} &= r(r-1)(r-2)^2(3-r) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$
Hallar las órbitas periódicas y analizar su estabilidad orbital.

3. Considere el sistema espacial dado en coordenadas esféricas
$$\begin{cases} \dot{\theta} &= 1 \\ \dot{\phi} &= \pi \\ \dot{\rho} &= \rho\left(\operatorname{sen}(\theta) + \pi \operatorname{sen}(\phi)\right) \end{cases}$$
y verificar si, salvo dimensión, las hipótesis del teorema de Poincare-Bendixon se cumplen, la conclusión no.

4. Considerar el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$
Probar que existen dos orbitas periódicas Γ_1, Γ_2 en el plano x, y y determinar su estabilidad. Mostrar que existen dos cilindros invariantes y describir las variedades $W^s(\Gamma_j)$ y $W^u(\Gamma_j)$ para $j = 1, 2$.

5. Mostrar que
$$\begin{cases} \dot{x} = y + y(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x - x(x^2+y^2) \end{cases}$$
es un sistema Hamiltoniano. Mostrar que el origen es una silla y que $(\pm 1, 0)$ son centros. Esbozar el diagrama de fases (observar la existencia de una separatriz compuesta).

6. Sea
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$
resolver el sistema en coordenadas polares. Fijado $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, considerar el plano
$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 | \theta = \theta_0,\ r > 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$
y determinar el mapa de Poincaré $P(r_0, z_0)$ donde $P : \Sigma \to \Sigma$. Calcular $DP(r_0, z_0)$ y probar que $DP(1, 0) = e^{2\pi B}$ donde los autovalores de B son -2 y 1.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el anillo $A = \{z \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq |z| \leq 2\}$. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Si cada segmento radial es una sección local, probar que hay una trayectoria periódica en A.

8. Probar que una órbita cerrada de un sistema dinámico C^1 planar, corta una sección local en, a lo sumo, un punto.

9. Sea A una región como la del ejercicio 4. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Supongamos que f no tiene ceros en A.

   a) Probar que hay una órbita cerrada.

   b) Si hay un número finito de órbitas cerradas, mostrar que al menos una de ellas tiene órbitas que se espiralan hacia ella de ambos lados (es decir, es un ciclo límite estable).

10. Considerar $\ddot{x} + \dot{x} + x\,(x^2 - 1) = 0$.

    a) Probar que existe $\beta > 0$, tal que $\forall\ \alpha > 0$ existe $T = T(\alpha)$ que verifica que si $|\xi| < \alpha$ entonces $|\varphi(t, \xi)| < \beta$ para $t > T(\alpha)$.

    b) Encontrar todos los puntos críticos y decidir la dimensión de su variedad estable e inestable.

    c) Mostrar que no existen órbitas periódicas.

    d) Esbozar el diagrama de fases.

11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio . Dada $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, se considera el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$.

    a) Probar que si Ω es simplemente conexo y si $div f \neq 0$ en todo Ω, entonces el sistema no tiene órbitas periódicas.

    b) Probar que si Ω es doblemente conexo (es decir, su complemento tiene dos componentes conexas) y si $div(gf) \neq 0$ en todo Ω, para alguna $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, entonces el sistema tiene a lo sumo una órbita periódica.

12. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ \dot{y} = x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

tiene exactamente una órbita periódica.

13. *a*) Probar que si $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ es una primera integral de una ecuación que no es constante sobre conjuntos abiertos no vacios, entonces la ecuación no tine ciclos límites. (Una primera integral de una ecuación es una función que es constante sobre cada solución de la ecuación).

    b) Sea U un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ no es constante sobre conjuntos abiertos no vacios, probar que el sistema Hamiltoniano

    $$\dot{x} = H_y \qquad \dot{y} = -H_x$$

    no tiene ciclos límites. En particular la ecuación (con $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, $X \subseteq \mathbb{R}$ abierto)

    $$\ddot{x} = f(x)$$

    no tiene ciclos límites.

Teorema de Lienard: Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{cases} \tag{1}$$

donde $g(x)$ y $F(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e impares, tal que $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Además $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, $F(x)$ tiene un cero simple en $x = a > 0$, $F(x)$ es monótona creciente en $(a, +\infty)$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Entonces el sistema (1) tiene un único ciclo límite y éste es estable.

1. El sistema (1) proviene de pasar a sistema la ecuación de segundo orden conocida como la ecuación de van der Pol generalizada

    $$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

    siendo $F'(x) = f(x)$

2. Considerar la ecuación de van der Pol

    $$\ddot{x} + \mu\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0$$

    Verificar que para $\mu > 0$ existe un único ciclo límite.

3. Considerar el sistema

    $$\begin{cases} \dot{x} &= y - \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

    verificar que tiene un único ciclo límite.

4. Considerar el sistema de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - \mu\left(x - x^3/3\right) \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

Verificar que

a) Cuando $\mu \to 0^+$ existe un único ciclo límite.

b) Cuando $\mu \to +\infty$ el ciclo límite es asintótico a la curva dada por el segmento horizontal $y = \pm\frac{2}{3}\mu$ y los dos arcos $y = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$.

Sugerencia: hacer el cambio de variables $u = y/\mu$ y $\tau = t/\mu$.

5. Sea $F(x)$ que satisface el teorema de Lienard. Probar que la ecuación

$$\ddot{z} + F(\dot{z}) + z = 0$$

tiene una única solución periódica, asintóticamente estable.

Sugerencia: hacer $x = \dot{z}$ e $y = -z$.