ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 6 - Complementaria
Primer Cuatrimestre 2008

Teoerma de Lienard

Teorema de Lienard: Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{cases} \tag{1}$$

donde $g(x)$ y $F(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e impares, tal que $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Además $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, $F(x)$ tiene un cero simple en $x = a > 0$, $F(x)$ es monótona creciente en $(a, +\infty)$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Entonces el sistema (1) tiene un único ciclo límite y éste es estable.

1. El sistema (1) proviene de pasar a sistema la ecuación de segundo orden conocida como la ecuación de van der Pol generalizada

   $$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

   siendo $F'(x) = f(x)$

2. Considerar la ecuación de van der Pol

   $$\ddot{x} + \mu\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0$$

   Verificar que para $\mu > 0$ existe un único ciclo límite.

3. Considerar el sistema

   $$\begin{cases} \dot{x} &= y - \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

   verificar que tiene un único ciclo límite.

4. Considerar el sistema de Van der Pol

   $$\begin{cases} \dot{x} &= y - \mu(x - x^3/3) \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

   Verificar que

   a) Cuando $\mu \to 0^+$ existe un único ciclo límite.

   b) Cuando $\mu \to +\infty$ el ciclo límite es asintótico a la curva dada por el segmento horizontal $y = \pm\frac{2}{3}\mu$ y los dos arcos $y = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$.
   Sugerencia: hacer el cambio de variables $u = y/\mu$ y $\tau = t/\mu$.

5. Sea $F(x)$ que satisface el teorema de Lienard. Probar que la ecuación

   $$\ddot{z} + F(\dot{z}) + z = 0$$

   tiene una única solución periódica, asintóticamente estable.

   Sugerencia: hacer $x = \dot{z}$ e $y = -z$.