ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 7
Primer Cuatrimestre 2008

Función de Green - Problema de Sturm-Liouville

1 Función de Green - Problemas en forma divergencia

Consideremos la ecuación de segundo orden en un intervalo $[a,b]$:

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = p_3(x) \tag{L}$$

y la ecuación en forma divergencia dado por

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,y'\right) + q(x)\,y = r(x) \tag{D}$$

y nombraremos con

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left(p.y'\right) + q.y \tag{L}$$

Decimos que L es regular sii $p > 0$ y $C^1(a,b)$. L es singular sii se anula en algún punto aislado.

1. Probar que (L)$\Longleftrightarrow$(D) con

$$\begin{array}{ll} p(x) = e^{\int_a^x p_1(t)dt} & \text{positiva y } C^1 \\ q(x) = -p_2 p & \text{continua} \\ r(x) = -p_3 p & \text{continua} \end{array}$$

2. Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación $Ly = 0$ y sea $W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ el wroskiano, entonces $\bar{W} = pW$ es constante.

3. Considere el problema no homogéneo

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

y supongamos que $\bar{y}(x)$ es una solución no trivial del correspondiente homogéneo. Entonces la ecuación no homogénea tiene al menos una solución si y solo si $\int_a^b f(x)\,\bar{y}(x)\,dx = 0$.

4. Para dos valores α y $\beta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, y considere los problemas de valores iniciales para el operador (L):

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(b) = 0 \\ y'(b) = \beta \end{cases}$$

y sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sus respectivas soluciones. Sea además $W(x)$ el wroskiano de y_1 e y_2, $\bar{W}(x) = p(x)\,W(x)$. Consideremos el problema asociado al operador (L) con datos de borde Dirichlet:

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Probar que

(a) La función de Green del problema (1) está dado por

$$G(x,z) = \begin{cases} -\frac{1}{\bar{W}(x)} y_1(x)\,y_2(z) & \text{si} \quad z \le x \\ -\frac{1}{\bar{W}(x)} y_1(z)\,y_2(x) & \text{si} \quad z \ge x \end{cases}$$

(b) $G(x,z)$ no depende de la elección de y_1 e y_2 (es decir que no depende de la elección de α y de β).

(c) La única solución del problema (1) está dada por

$$y(x) = \int_a^b G(x,z)\, f(z)\, dz$$

(d) ¿Cómo buscaría la función de Green si el problema es tipo Neuman? $(y'(a) = y'(b) = 0)$

5. Dar la función de Green asociada al problema

(a) $\begin{cases} -y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -y'' - \lambda y = f(x) \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ no siendo λ un autovalor del operador.

(c) $\begin{cases} -y'' + y = x(x-1) \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -y'' - \lambda y = f(x) \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$

6. Propiedades de la función de Green:

(a) $G(x,z)$ es continua en $[a,b] \times [a,b]$.

(b) Para el problema Dirichlet $G(a,z) = G(b,z)$, y para el problema Neuman $\frac{\partial G}{\partial x}(a,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(b,z)$

(c) $G(x,z) = G(z,x)$ para todo $(x,z) \in [a,b] \times [a,b]$.

(d) $\forall z_0$ fijo y $\forall x \neq z_0$, $G(x,z_0)$ stisface $L(G(x,z_0)) = 0$.

(e) $\frac{\partial G}{\partial x}$ está definida y es acotada en todo $[a,b] \times [a,b]$ salvo la diagonal.

(f) $\lim_{x\to z_0^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x,z_0) - \lim_{x\to z_0^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x,z_0) = -\frac{1}{p(z_0)}$

(g) (Unicidad de la función de Green) Existe una única función $G(x,z)$ continua en $[a,b]\times[a,b]$ tal que para todo $f(x) \in C^0[a,b]$, la solución del problema (1) está dada por

$$y(x) = \int_a^b G(x,z)\, f(z)\, dz$$

2 Comparación

1. Dada la ecuación de segundo orden con $g(x)$ y $h(x)$ funciones continuas

$$y'' + g(x)\, y' + h(x)\, y = 0$$

considere dos soluciones linealmente independientes $u(x)$ y $v(x)$. Probar que entre dos ceros consecutivos de la función $v(x)$, la función $u(x)$ tiene a lo sumo un cero.

2. Dadas las ecuaciones

$$y'' + g(x)\, y' + h_1(x)\, y = 0 \tag{2}$$
$$y'' + g(x)\, y' + h_2(x)\, y = 0 \tag{3}$$

con $h_2(x) \geq h_1(x)$. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos soluciones no triviales de (2) y (3) respectivamente. Probar que si $v(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces $u(x)$ tiene a lo sumo un cero en $[a,b]$, salvo que $v(a) = v(b) = 0$ para el caso $h_1(x) \equiv h_2(x)$ y $u(x) = \lambda v(x)$.

3. Mostrar que las soluciones de la ecuación

$$y'' + \left(e^{-x} + 1\right) y = 0 \quad \text{para } x > 0$$

tiene infinitos ceros.

4. Dadas las ecuaciones

$$y'' + g_1(x) y' + h_1(x) y = 0 \tag{4}$$
$$y'' + g_2(x) y' + h_2(x) y = 0 \tag{5}$$

donde además se cumple la condición

$$h_2(x) - \frac{1}{2} g_2'(x) - \frac{1}{4} (g_2(x))^2 \geq h_1(x) - \frac{1}{2} g_1'(x) - \frac{1}{4} (g_1(x))^2 \tag{6}$$

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos soluciones no triviales de (4) y (5) respectivamente. Probar que si $v(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces $u(x)$ tiene a lo sumo un cero en $[a,b]$, salvo que $v(a) = v(b) = 0$, que en (6) valga la igualdad y que $u(x) = \lambda v(x) e^{-\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)] d\xi}$.

Sugerencia: verificar que la función $\tilde{u}(x) = u(x) e^{-\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)] d\xi}$ satisface la ecuación

$$y'' + g_2(x) y' + H(x) y = 0$$

con $H(x) = \frac{1}{2}\left[g_2'(x) - g_1'(x)\right] + \frac{1}{4}\left[g_2^2(x) - g_1^2(x)\right] + h_1(x)$.

5. Compare los ceros de las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$y'' + \left(x^2 + 2\right) y' + (1 + x) y = 0$$
$$y'' + \frac{1}{2} x^2 y' + (10 + 2x) y = 0$$

3 Autovalores y autofunciones

Para $\rho(x)$ y $q(x) \in C[0,1]$ y $p(x) \in C^1(0,1)$, y además p y $\rho > 0$. Consideramos el operador $Lu = -(pu')' + qu$ y el problema con dato de contorno homogéneo

$$\begin{cases} Lu = \lambda \rho u \\ u(0) = u(1)(0) \end{cases} \tag{7}$$

El primer autovalor satisface la desigualdad del cociente deRayleigh

$$\lambda_1 = \inf \frac{\int_0^1 \left(p(u')^2 + qu^2\right) dx}{\int_0^1 \rho u^2 dx} \quad \text{para } u \in C^1(0,1) \text{ y } u \neq 0$$

y existe $u_1(x)$ que realiza el ínfimo. El siguiente autovalor satisface

$$\lambda_2 = \inf \frac{\int_0^1 \left(p(u')^2 + qu^2\right) dx}{\int_0^1 \rho u^2 dx} \quad \text{para } u \in C^1(0,1),\ u \neq 0 \text{ y } \int_0^1 u_1 u \rho dx = 0$$

y así sucesivamente.

1. Probar que el autoespacio asociado a un autovalor λ del problema (7) es 1. Compare lo que sucede si se cambia la condición de contorno por una periódica.

2. Las autofunciones correspondientes a distintos autovalores de (7) son ortogonales respecto a la función de masa o de peso $\rho(x)$, i..e: $\int_0^1 u_1 u_2 \rho dx = 0$.

3. Todos los autovalores de (7) son positivos. En particular 0 no es autovalor.

4. Hallar las autofunciones y autovalores de

(a) $\begin{cases} -\left((1+x)^2 u'\right)' = \lambda u & \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{con} \quad 0 < x < 1 \\ u(1) - u(0) = 0 \\ u'(1) - u'(0) = 0 \end{cases}$

5. La primera autofunción $u_1(x)$ no cambia de signo en $[0,1]$, y aún más, no se anula en $(0,1)$.

6. Todas las $u_j(x)$ para $j \geq 2$, tienen un cero en $(0,1)$.

7. Si α y β son dos ceros consecutivos de una autofunción u_n, entonces λ_n es el menor autovalor del problema en el intervalo (α,β).

8. Reduciendo el intervalo (α,β), aumentando $p(x)$ o $g(x)$, o reduciendo $\rho(x)$, aumenta el menor autovalor del problema.

9. (Teorema de separación) Si $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones respectivamente de

$$-(pu')' + qu = \lambda \rho u$$
$$-(pv')' + qv = \bar{\lambda} \rho v$$

con $\bar{\lambda} \leq \lambda$. Si $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son ceros consecutivos de $v(x)$, entonces debe existir por lo menos un cero de $u(x)$ en $\left(\bar{\alpha},\bar{\beta}\right)$ salvo que $\bar{\lambda} = \lambda$ y v es un múltiplo de u.

10. (Teorema de oscilación) La $k-$ésima autofunción $u_k(x)$ del problema (7) tiene exactamente $k-1$ ceros en $(0,1)$.

11. (Teorema de monotonía) Reduciendo el intervalo (α,β), aumentando $p(x)$ o $q(x)$ o disminuyendo $\rho(x)$, aumentan todos los autovalores del problema.

12. Hallar cotas superiores e inferiores para el k-ésimo autovalor del problema

$$\begin{cases} -\left(\left(1+x^2\right) u'\right)' - xu = \lambda \left(1+x^2\right) u & \text{para} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$