ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 1
Primer Cuatrimestre 2004

(1) Realice un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales,

$$\text{(a) } F(x,y) = (y,-x) \quad \text{(b) } F(x,y) = (x,-y) \quad \text{(c) } F(x,y) = (x,x^2).$$

(2) Esbozar el plano de fases de la ecuación $x' = Ax$, sin resolver para,

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Considerar el sistema a un parámetro,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \lambda y \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

(4) Para cada una de las siguientes matrices A, esbozar el campo vectorial $x \to Ax$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) Sea A una matiz diagonal de $n \times n$. Encontrar condiciones sobre A que garanticen que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$.

(6) Sea A una matriz de $n \times n$.
  (a) ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?
  (b) ¿Cuál es la relación geométrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?

(7) Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y hacer un bosquejo del diagrama de fases.
Sug: introducir nuevas incógnitas (u,v) mediante el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

¿Por qué se introduce este cambio de variables? ¿Qué información me da respecto del sistema original? Comparar el diagrama de fases en las coordenadas (x,y) y en las coordenadas (u,v).

(8) En los siguientes sistemas de ecuaciones.
  (a) Encontrar las soluciones estacionarias.

(b) Plantear el problema linealizado en cada una de las soluciones estacionarias.

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - xy + 3x\\ \dot{y} &= 2y - y^2\end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned}\dot{x} &= x^2y + y^2x\\ \dot{y} &= y^2z + z^2y\\ \dot{z} &= x^2z - z^2x.\end{aligned}$$

(9) Escribir los siguientes sistemas en coordenadas polares y decidir si el origen es un centro, centro-foco, foco estable, un nodo estable o inestable. Para los problema (g) y (h) analizar los problemas linealizados.

(a) $\begin{aligned}\dot{x} &= x - y\\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$

(b) $\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xy^2\\ \dot{y} &= x + y^3\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}\dot{x} &= -y - xy\\ \dot{y} &= x + x^2\end{aligned}$

(d) $\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^3 - xy^2\\ \dot{y} &= x - y^3 - x^2y\end{aligned}$

(f) $\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^3 + xy^2\\ \dot{y} &= x + y^3 + x^2y\end{aligned}$

(g) $\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \frac{y}{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\\ \dot{y} &= -y + \frac{x}{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}\end{aligned}$

(h) $\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ \dot{y} &= x + y\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$

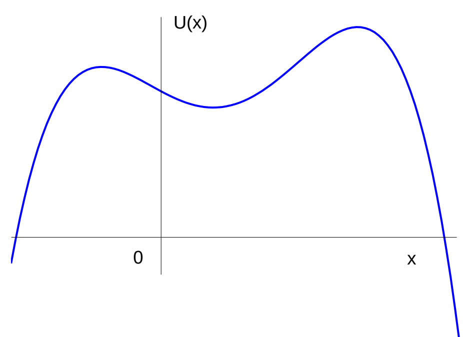
(10) Sea $f = U'$, donde $U \in C^2((\alpha,\beta),\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial

$$-\ddot{x} = f(x).$$

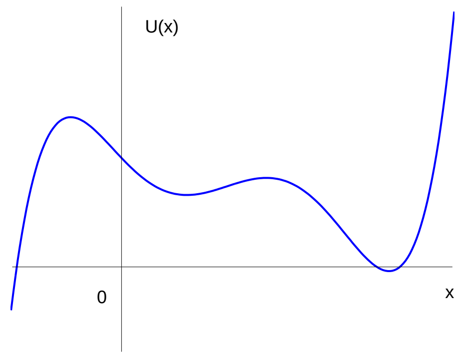
(a) Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales,

(i)$U(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{a}{x^2}$ con $x > 0,\ a > 0.$

(ii)



(iii)



(b) Probar que el punto critico $(x_0, 0)$ es una silla si es un maximo local estricto de la función $U(x)$ y es un centro si es un minimo local estricto de $U(x)$.

(11) Considerar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, ésto es, se considera la ecución

$$-m\ddot{x} = \nabla U(x) \quad x \in \mathbb{R}^3/\{0\}$$

donde $U(x) = U_0(|x|)$ con $U_0 \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$.

(a) Probar que se conserva el momento angular, M, relativo al origen. Donde $M = x \times m\dot{x}$ (producto vectorial).

(b) Mostrar que todas las órbitas son planares (en el plano perpendicular a M).

(c) Probar la ley de Kepler, que dice que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales.
(Sug: Usar la formula de Green $\int_{\triangle} dx \wedge dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\triangle} xdy - ydx$ para calcular el área del triángulo curvo).

(12) Se lanza hacia arriba un cuerpo de masa m con una velocidad inicial v_0. Sabiendo que la fuerza gravitatoria ($F = -mg$) es conservativa.

(a) Hallar la energía potencial y cinética del cuerpo cuando alcanza una altura h.

(b) Graficar el potencial y encontrar el valor de h donde el movimeiento cambia de dirección.

(13) Supongamos un cuerpo unido de un resorte (ideal) apoyado sobre una superficie sin rozamiento. Se lleva el cuerpo hasta una distancia x_0 a la izquierda de la posición de equilibrio y se lo suelta. sabiendo que la fuerza de un resorte ideal se expresa $F = -k(x - x_{eq})$ con k constante del resorte.

(a) Hallar la energía potencial, cinética y mecánica.

(b) Graficar el potencial.

(c) Hacer un bosquejo del diagrama de fases.

(14) Considerar el péndulo ideal simple constituído por una masa m suspendida de un hilo sin masa de longitud l.

(a) Teniendo en cuenta que la tensión del hilo no realiza trabajo, calcular la energía potencial y graficarla.

(b) Hacer un bosquejo del diagrama de fases.

(c) Analizar: ¿Qué sucede si la energía mecánica varía de 0 a $2mgl$? ¿Y si es mayor que $2mgl$?

(15) Las fuerzas gravitatorias entre dos masas que se encuentran a una distancia r son de la forma $F = -\frac{k}{r^2}$ (son atractivas). Las fuerzas electroestáticas, que pueden ser atractivas o repulsivas, son de la forma $F = \pm\frac{k}{r^2}$.

(a) Hallar la energía potencial en ambos casos. Considerar que el potencial es nulo cuando $r \to \infty$. Graficar.

(b) Se sabe que a una distancia r_0 del centro de fuerzas la energía cinética es E_0.

(i) Si un cuerpo de masa m se halla sometido a una fuerza del tipo $F = \frac{k}{r^2}$ ¿Hasta que distancia del centro de fuerzas se puede acercar el cuerpo ?

(ii) Si ahora la fuerza es del tipo $F = -\frac{k}{r^2}$ (atractiva) ¿En que región queda atrapado el cuerpo?

(c) Analizar en el caso (ii) qué sucede si la energía mecánica es: positiva, negativa o nula.

(16) (a) Probar que si se parte de x_1 (con $t = t_1$) y se llega a x_2 (con $t = t_2$) sobre la curva de nivel de energía $E = E_0$ (en una dirección) se cumple:

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{2(E - U(x))}.$$

(b) Calcular: el período del péndulo simple del ejercicio 14, el tiempo que tarda la masa m del ejercicio 12 en llegar a h_{max}.