ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 3/ PARTE A
Primer Cuatrimestre 2004

Sistemas Lineales

(1) (a) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En ii., iv. y v. resolver además el problema de valores iniciales.

$$\text{i.}\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \qquad \text{ii.}\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\text{iii.}\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \qquad \text{iv.}\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{v.}\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = 0?$$

¿Cuáles verifican

$$\lim_{t\to+\infty} \| (x(t), y(t)) \| = \infty?$$

(c) Esbozar los diagramas de fases.

(2) Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1,0)$ y $(1,1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si
(a) $0 < \lambda < \mu$
(b) $\lambda < 0 < \mu$
(c) $\lambda = 0, \mu < 0$
(d) $\lambda < \mu < 0$

(3) Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + bx' + cx = 0 \quad \text{con } b, c \text{ constantes} \tag{1}$$

(a) Examinando el sistema de primer orden equivalente probar que (1) tiene una única solución para toda condición inicial $x(0) = u$, $x'(0) = v$.
(b) ¿Qué hipótesis sobre b y c asegura que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ para toda solución $x(t)$?

(4) (a) Graficar el diagrama de fases de un sistema bidimensional

$$x' = Ax \quad A \in \mathrm{R}^{2\times 2}$$

y encontrar la solución general, en los siguientes casos:
(i) A tiene autovalores reales de distinto signo
(ii) A tiene dos autovalores reales negativos (A a diagonalizable)
(iii) A tiene un autovalor negativo pero no es diagonalizable
(iv) A tiene autovalores complejos conjugados $a \pm bi$ con $a < 0$
(v) Idem (iv) con $a = 0$
(vi) Idem (iv) con $a > 0$
(vii) Idem (ii) con autovalores positivos
(viii) Idem (iii) con autovalor positivo

(b) ¿En cuáles de los items anteriores se verifica $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ con cualquier condición inicial? ¿En cuáles se verifica $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$?

(5) (a) Resolver la ecuación diferencial en R^3 $x' = Ax$ en los siguientes casos:

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x(0) = (1, 2, 1)$

iii. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ iv. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x(0) = (2, 1, 1)$

(b) Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones.

(6) Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.
Definición: Una matriz $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ se dice *semisimple* si es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

(7) Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real no positiva.

(a) Si A a es semisimple, probar que toda solución de $x' = Ax$ se mantiene acotada cuando $t \to +\infty$.

(b) ¿Qué sucede si A no es semisimple?

(8) Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y supongamos que todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas del mismo período. Entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $t^2 + a^2$ con $a \in \mathrm{R}$.

(9) Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

(10) Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

(a) que verifique $x(1) = 2 \quad y(1) = 7$

(b) que verifique $x(1) = 0 \quad y(1) = 0$

(11) Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - 8y' + 16y = 0$

(b) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(c) $y'' - y' - 2y = 0$

(12) Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

(a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^2$

(b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{2t}$

(c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = e^t \cos 2t$

(13) Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = \exp(-x)$ que verifiquen:

(a) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

(b) $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$

(d) $y'(0) = 1$