ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - PRACTICA 3/ PARTE B
Primer Cuatrimestre 2004

Sistemas Lineales

(1) Halle los subespacios estables, inestables y centrales (E^s, E^u y E^c) del sistema lineal

$$x' = Ax \tag{1}$$

para las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En cada caso, también esboce el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At}?

(2) Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (1) con $x(0) = x_0$. Muestre que
  (a) si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$;
  (b) si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$;
  (c) si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathrm{R}$, $m \le |x(t)| \le M$.

(3) Muestre que las únicas líneas invariantes para el sistema lineal (1) con $x \in \mathrm{R}^2$ son las líneas $ax + by = 0$ donde $v = (-b, a)$ es un autovector de A.

(4) Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax + b(t) \tag{2}$$

donde $b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ es continuo.

(5) Resuelva el sistema no homogéneo (2) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

(6) Pruebe el siguiente Teorema:
  Sea $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ y sea $B(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}$ continua para $t \ge t_0$.
  Probar que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y que si $\|B(t)\| \to 0$ $(t \to \infty)$, entonces las soluciones de

$$x' = Ax + B(t)x \tag{3}$$

verifican $x(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ (y luego, 0 es asintóticamente estable).

(7) Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (3) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

(8) Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$