ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PRACTICA 4
Primer Cuatrimestre 2004

Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

1. En los siguientes sistemas lineales decidir si $0 \in \mathrm{R}^n$ es un punto de equilibrio estable de $\dot{x} = Ax$.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea A un operador lineal en R^n cuyos autovalores tienen todos parte real nula. Entonces $0 \in \mathrm{R}^n$ es un punto de equilibrio estable de $x' = Ax$ sii A es semisimple. Además 0 nunca es asintóticamente estable.

3. Si $\bar{x}$ es un sumidero de un sistema dinámico (es decir, $\bar{x}$ es un punto de equilibrio y 0 es un sumidero del sistema linearizado alrededor de $\bar{x}$) entonces $\bar{x}$ tiene un entorno que no contiene otros puntos de equilibrio.

4. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar la estabilidad del origen en las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a) } \frac{du}{dt} = u(u^2-1)(u^2-4) \qquad \text{(b) } \frac{du}{dt} = u^2(u^2-1)(u^2-4)$$

$$\text{(c) } \frac{du}{dt} = -\sin u \qquad \text{(d) } \frac{du}{dt} = -\sin^2 u$$

5. Mostrar que el diagrama de flujo del sistema lineal perturbado (P), donde $r^2 = x^2 + y^2$, tiene el siguiente comportamiento cualitativo: existe una sucesión de círculos concéntricos centrados en $(0,0)$ con radio $\frac{1}{n}$ tales que las órbitas se espiralan alternativamente acercándose y

alejándose de cada uno de ellos en el sentido positivo. En consecuencia, el origen es un punto de equilibrio estable.

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \dot{x} &= -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \\ \dot{y} &= x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \end{cases}$$

6. Discutir la estabilidad de los puntos críticos para la ecuación del péndulo simple amortiguado:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda \sin x = 0 \qquad x \in \mathrm{R},\ \alpha > 0,\ \lambda = \frac{g}{l} > 0.$$

7. La ecuación de Lienard

$$(\mathrm{L}) \begin{cases} \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -x \end{cases} \qquad \text{con } f \in C^1(\mathrm{R}, \mathrm{R})$$

(o equivalentemente, $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + x = 0$) juega un importante rol en la teoría de circuitos eléctricos. (Como caso especial, uno obtiene la ecuación de Van der Pol si $f(x) = x^3 - x$).

(a) Si se tiene que $f'(0) \neq 0$, determinar la estabilidad de los puntos estacionarios de (L) en función de $f'(0)$.

(b) Si se tiene que $xf(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, mostrar que el origen $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable. (Sug: puede ser útil saber que $x^2 + y^2$ puede interpretarse como la energía).

8. Analizar la estabilidad en el origen en:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - 2x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3 \end{aligned}$$

9. Escribir el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + x_1x - 2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

en la forma

$$\dot{y} = By + G(y)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y $G(y)$ es cuadrática en y_1 e y_2.

10. Encontrar los tres primeras aproximaciones sucesivas $u^{(1)}(t,a)$, $u^{(2)}(t,a)$ y $u^{(3)}(t,a)$ para

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

y usar $u^{(3)}(t,a)$ para aproximar S cerca del origen. Aproximar también la variedad inestable, U cerca del origen. Observar que $u^{(2)}(t,a) = u^{(3)}(t,a)$ y por lo tanto $u^{(j+1)}(t,a) = u^{(j)}(t,a)$ para $j \geq 2$.Entonces $u^{(j)}(t,a) \to u(t,a) = u^{(2)}(t,a)$ que da exactamente la función que define S.

11. Resolver el sistema del problema anterior, y mostrar que S y U están dadas por

$$S : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}$$

y

$$U : x_1 = 0.$$

Esbozar S, U, E^s y E^u.

12. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

y probar que las aproximaciones sucesivas $\phi_k \to \phi$ y $\psi_k \to \psi$ cuando $k \to \infty$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$. Definir $H_0 = (\phi, \psi)^T$ y usar este homemorfismo para encontrar

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s \, ds.$$

Usar el homoemorfismo H para encontrar las variedades estables e inestables $W^s(0) = H^{-1}(E^s)$ y $W^u(0) = H^{-1}(E^u)$ para este sistema.

Ayuda: Tienen que obtener, $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3^2/3, x_3)^T$

$$W^s(0) = \{x \in \mathrm{R}^3 | x_3 = 0\}$$

y

$$W^u(0) = \{x \in \mathrm{R}^3 | x_1 = 0,\ x_2 = x_3^2/3\}.$$