

Elementos de Espacios de Banach

2do cuatrimestre del 2006

PRÁCTICA 1 - TOPOLOGÍAS DÉBILES

1. a) Probar que la esfera S_X es w -densa en la bola B_X .
b) Probar que si X tiene dimensión infinita, la topología débil en X no es metrizable (Sugerencia: para cada n , 0 está en la clausura débil de nS_X).
2. a) Probar que el “polinomio” $P : \ell_2 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n}$ no es débilmente continuo en 0 .
b) Probar que $P|_{B_{\ell_2}}$ es débilmente continuo en B_{ℓ_2} (y, en particular, en 0).
3. a) Sea $(x_n)_n \subset \ell_2$ una sucesión que converge débilmente a 0 . Entonces existe una sub-sucesión $(x_{n_k})_k$ cuyos promedios tienden a 0 en norma. (Sugerencia: al elegir x_{n_k} , considerar los x_{n_j} anteriores como funcionales lineales en ℓ_2).
b) Observar que el resultado vale también si cambiamos 0 por cualquier $x \neq 0$.
4. Una función $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ es un polinomio homogéneo de grado k si existe una aplicación k -lineal $A : \underbrace{X \times \cdots \times X}_n \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $P(x) = A(x, \dots, x)$.

Notar que P en el ejercicio 2) es un polinomio homogéneo.

Si $X = \mathbb{K}^n$, todo polinomio es de la forma

$$P(y) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} a_{\alpha} y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ es un multi-índice y $a_{\alpha} \in \mathbb{K}$ para cada α .

Utilizar este hecho para probar:

- a) Un polinomio $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ es w -continuo en 0 si y solamente si es combinación algebraica de finitas funcionales lineales.
 - b) Un polinomio $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ es w -continuo en algún punto si y solamente si es combinación algebraica de finitas funcionales lineales.
 - c) Un polinomio $Q : X' \rightarrow \mathbb{K}$ es w^* -continuo si y solamente si es combinación algebraica de finitas funcionales lineales en X' dadas por elementos de X .
5. Sea X un espacio de Banach, X' su dual y sea $\|\cdot\|_1$ una norma en X' equivalente a la norma dual. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- i) Existe una norma $\|\cdot\|_0$ en X (equivalente a la original) tal que $\|\cdot\|_1$ es la norma dual de $\|\cdot\|_0$.
 - ii) El conjunto $\{x' \in X' : \|x'\|_0 \leq 1\}$ es w^* -cerrado.

6. Definimos en ℓ_1 la norma $\|x\|_1 = \sum_j |x_j| + 2 \left| \sum_j x_j \right|$.
- ¿La norma $\|\cdot\|_1$ es equivalente a la norma usual?
 - ¿Existe alguna norma en c_0 de la cual $\|x\|_1$ es la norma dual?
7. $\mathbb{R}^2$ es, naturalmente, isomorfo a un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ con la norma que se nos ocurra. ¿Cuál es el dual de $\mathbb{R}^2$? ¿Cuál es el dual de $\mathbb{R}^3$? ¿Y esto a qué viene? A demostrar que la afirmación “si el espacio es más chico, el dual es más grande” es falsa.
8. Dado un operador continuo $T : X \rightarrow Y$, el operador transpuesto $T' : Y' \rightarrow X'$ está dado por $T'(y') = y' \circ T$.
- Sea $S : Y' \rightarrow X'$ un operador acotado. S es el transpuesto de un operador de X a Y si y sólo si S es w^* - w^* continuo.
- Decimos que un operador $T : X \rightarrow Y$ es débilmente compacto si $\overline{T(B_X)}$ es débilmente compacto en Y .
- Probar:
- T es débilmente compacto si y sólo si la imagen de $T'' : X'' \rightarrow Y''$ está contenida en Y .
 - T es débilmente compacto si y sólo si T' es w^* - w continuo.
 - T es débilmente compacto si y sólo si T' lo es.
 - Deducir que X es reflexivo si y sólo si X' lo es.