Elementos de Espacios de Banach

2do cuatrimestre del 2006

Práctica 2 adicional - Espacio de James

Dada una sucesión de escalares $a = (a_k)_k$, definimos

$$\|a\|_J = \sup \left\{ \left(|a_{k_1} - a_{k_2}|^2 + |a_{k_2} - a_{k_3}|^2 + \cdots + |a_{k_{n-1}} - a_{k_n}|^2 + |a_{k_n} - a_{k_1}|^2 \right)^{1/2} \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todo $n \in \mathbb{N}$ y toda elección de naturales $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$.

El espacio de James está dado por

$$X_J = \left\{ a : \|a\|_J < \infty \text{ y } \lim_{k \to \infty} a_k = 0 \right\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. $\|\cdot\|_J$ es una norma en X_J que lo hace un espacio de Banach.

2. La sucesión canónica $\{e_n\}_n$ es una base monótona de X_J.

3. La base canónica $\{e_n\}_n$ es achicante.

   Sugerencia: si $\{v_m\}_m$ es una sucesión de bloques de la base canónica, disjuntos y de norma 1, entonces la serie $\sum_m \frac{v_m}{m}$ converge en X_J.

4. El bidual de X_J está dado por

   $$X_J'' = \left\{ a : \|a\|_J < \infty \right\}.$$

5. X_J no es reflexivo pero es isomorfo a X_J''.

   Sugerencia: si $\|a\| < \infty$, entonces $(a_k)_k$ es una sucesión convergente de escalares.

6. X_J no tiene ninguna base incondicional.

   Sugerencia: ejercicio 12 de la guía 2.