Elementos de Espacios de Banach

2do cuatrimestre del 2006

Práctica 3 - Espacios de sucesiones y funciones

1. a) Probar que todo espacio de Banach separable es isomorfo a un subespacio de ℓ_∞.

   b) Probar que todo espacio de Banach es isomorfo a un subespacio de $\ell_\infty(I)$, para algún conjunto de índices I.

2. Probar que todo espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de ℓ_1.

3. Mostrar que si $X = \ell_p$ ó $X = L_p[0,1]$, entonces X es isomorfo a $X \times X$. ¿Qué pasa si X es el espacio de James?

   Sugerencia: considerar la codimensión del espacio de James en su bidual.

4. Si $1 < p < \infty$, $L_p[0,1]$ es isomorfo a $L_p[0,1] \times \ell_2$.

5. Consideremos $1 \leq q \leq 2 < p$ ó $2 \leq q < p$. ¿Puede ser ℓ_p isomorfo a un subespacio de $L_q[0,1]$? ¿Y $L_p[0,1]$? Si $p \neq q$, ¿pueden ser isomorfos $L_q[0,1]$ y $L_p[0,1]$?

6. Un operador $T : X \to Y$ se dice absolutamente sumante si existe una constante C tal que para toda colección finita $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de X se tiene:

   $$\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\| \leq C \sup_{x' \in B_{X'}} \sum_{k=1}^{n} |x'(x_k)|$$

   Utilizar las desigualdades de Khintchine para probar que la inclusión canónica de ℓ_1 en ℓ_2 es absolutamente sumante.

7. Sea X un espacio inyectivo. Probar que hay una constante $C > 0$ tal que, para todo $W \supset X$ (W contiene isométricamente a X) existe una proyección de W en X con norma a lo sumo C.

   Sugerencia: ejercicio 1. b)