

FUNCIONES ANALÍTICAS EN ESPACIOS DE BANACH

Práctica 1: Funciones multilineales y Polinomios

Notación: E, F y X serán espacios de Banach. Para E , B_E denota su bola unidad abierta y E' su espacio dual. El cuerpo de escalares \mathbb{K} será indistintamente \mathbb{R} o \mathbb{C} .

1. Sea $A : E \times F \rightarrow X$ una aplicación bilineal. Mostrar que son equivalentes:
 - (a) A es continua.
 - (b) A es continua en $(0, 0)$.
 - (c) $\sup_{x \in B_E, y \in B_F} \|A(x, y)\| < \infty$.
 - (d) Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in E, y \in F$: $\|A(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$.
2. Mostrar que $A : E \times F \rightarrow X$ resulta una bilineal continua en los siguientes casos:
 - (a) Sean $\varphi \in E'$ y $\psi \in F'$ y sea $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Verificar que $\|A\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$.
 - (b) Sean $(\varphi)_j \subset B_{E'}$ y $(\psi)_j \subset B_{F'}$ y $\lambda = (\lambda_j) \in \ell_1$. Sea $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Verificar que $\|A\| \leq \|\lambda\|_1$.
 - (c) El morfismo evaluación, $\Phi: \mathcal{L}(E; X) \times E \rightarrow X$ dado por $\Phi(T, x) = Tx$. Ver que $\|\Phi\| = 1$.
 - (d) El morfismo convolución, $A: L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$, $A(f, g) = f * g$.
 - (e) Sea K un espacio compacto y $C(K)$ el espacio de funciones continuas sobre K . Sea $A: C(K) \times E \rightarrow C(K; E)$, $A(f, x) = f(\cdot)x$.
3. Sea $\mathcal{B}il(E, F; X) = \{A: E \times F \rightarrow X; A \text{ es bilineal y continua}\}$. Mostrar que resulta un espacio de Banach si, para $A \in \mathcal{B}il(E, F; X)$, se considera la norma $\|A\| = \sup_{x \in B_E, y \in B_F} \|A(x, y)\|$.
4. Sea $\mathcal{B}il(E, F) = \{A: E \times F \rightarrow \mathbb{K}; A \text{ es bilineal y continua}\}$. Probar que $\mathcal{B}il(E, F)$ y $\mathcal{L}(E; F')$, con las normas usuales, son espacios de Banach isométricamente isomorfos.
5. Para $A : E \times F \rightarrow X$ una aplicación bilineal, se definen $A_x: F \rightarrow X$ y $A_y: E \rightarrow X$ los operadores dados por $A_x(y) = A_y(x) = A(x, y)$. Mostrar que A es una bilineal continua si y sólo si A_x y A_y son operadores continuos, esto es: A es separadamente continua.
6. Sean $A_n, A: E \times F \rightarrow X$ aplicaciones bilineales.
 - (a) Mostrar que A es continua si y sólo si A tiene gráfico cerrado.
 - (b) Mostrar que si $A_n(x, y)$ converge a $A(x, y)$ para todo $(x, y) \in E \times F$ y A_n es continua para todo n , entonces A es continua.

(Sugerencia: en ambos casos mostrar que A es separadamente continua.)
7. Sea $P : E \rightarrow \mathbb{K}$ un polinomio n -homogéneo, mostrar que son equivalentes:
 - (a) P es continuo en E .
 - (b) P es continuo en cero.
 - (c) $\sup_{x \in B_E} |P(x)| < \infty$.
 - (d) Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in E$ se tiene $|P(x)| \leq C\|x\|^n$.
8. Sea $\mathcal{P}^{(n)}(E)$, el conjunto de polinomios n -homogéneos continuos escalares sobre E . Mostrar que resulta un espacio de Banach si, para $P \in \mathcal{P}^{(n)}(E)$, se considera la norma $\|P\| = \sup_{x \in B_E} |P(x)|$.

FUNCIONES ANALÍTICAS EN ESPACIOS DE BANACH

Funciones multilineales y Polinomios - Segunda Parte

9. Sea $B \subset E$ un subconjunto. Probar que B es acotado si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que: $\sup_{x \in B} |P(x)| < \infty$ para todo $P \in \mathcal{P}(^n E)$.
10. Sea Y un espacio de Banach real y X un subespacio cerrado no trivial de Y . Sea $\varphi \in Y'$, $\|\varphi\| = 1$, que se anula sobre X . Sea $\psi \in X'$, $\|\psi\| = 1$, y $\bar{\psi}: Y \rightarrow \mathbb{K}$ una extensión por Hahn-Banach de ψ . Consideremos $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ el polinomio $P = \psi^n$, con $n \geq 2$. Mostrar que $P_t = \bar{\psi}^n - t^2 \bar{\psi}^{n-2} \varphi^2$ son infinitas extensiones distintas de P con $\|P_t\| = \|P\|$, para todo $0 < t < 1$.
 Notar que si $Y = X''$ con X no reflexivo y $\bar{\psi}(z) = z(\psi)$, P_0 es la extensión canónica de P y P_t , $0 < t < 1$, arroja infinitas extensiones de P que preservan su norma.
11. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$. Mostrar que el polinomio n -homogéneo dado por el producto, $P = \varphi_1 \cdots \varphi_n$, es de tipo finito.
12. (a) Sea E un espacio de sucesiones y sea $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Hallar condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ para que P resulte continuo si $E = c_0, \ell_p, \ell_{\infty}$. ¿Qué debe pasar para que P resulte aproximable?
 (b) Sea $E = C(K)$ o $L_p(K)$ (K compacto) y $P(f) = \int_K f^n g \, d\mu$ para $f \in E$, qué condiciones debe cumplir g para que P sea continuo?
13. (a) Probar que la inclusión $(\mathcal{P}_N(^n E), \|\cdot\|_N) \hookrightarrow (\mathcal{P}(^n E), \|\cdot\|)$ es continua y que vale $\|P\| \leq \|P\|_N$ para todo $P \in \mathcal{P}_N(^n E)$.
 (b) Probar que el subespacio $\mathcal{P}_f(^n E)$ es denso en $(\mathcal{P}_N(^n E), \|\cdot\|_N)$.
14. Sea $P \in \mathcal{P}(^n E)$ un polinomio nuclear y sea $T \in \mathcal{L}(F; E)$. Mostrar que $P \circ T$ es un polinomio nuclear sobre F y que $\|P \circ T\|_N \leq \|P\|_N \|T\|^n$.
15. Mostrar que la siguiente inclusión de subespacios $\mathcal{P}_A(^n E) \subset \mathcal{P}_w(^n E)$.
16. Sea $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H . Para $n \geq 2$ se define $P: H \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle x, e_j \rangle^n.$$

Probar que $P \in \mathcal{P}_N(^n H)$ si y sólo si $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$. Mostrar que $\|P\|_N = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$. ¿Qué pasa cuando $n = 1$?

17. Sea $E = \ell_p$, $p \geq 2$. Sea $P: E \rightarrow \mathbb{K}$ el polinomio dado por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Mostrar que P es nuclear si y sólo si $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_1$. (Sugerencia: separar en los casos $p = 2$ y $p > 2$.)
18. Sea $E = \ell_p$, $1 \leq p < 2$. Sea $P: E \rightarrow \mathbb{K}$ el polinomio dado por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Sea $T: \ell_p \rightarrow \ell_1$ el operador definido por $T(x) = (a_1^{1/n} x_1, a_2^{1/n} x_2, a_3^{1/n} x_3, \dots)$
 - (a) Mostrar que $Q_k: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$, dado por $Q_k(x) = \sum_{j=1}^k x_j^n$ tiene $\|Q_k\|_N = 1$.
 - (b) Calcular $\|T\|$ y ver que $\|Q_k \circ T\|_N \leq (\sum_{j=1}^k |a_j|^{q/n})^{n/q}$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 - (c) Mostrar que si $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_{\frac{q}{n}}$, entonces P es nuclear y estimar $\|P\|_N$.