Funciones Analíticas en espacios de Banach

Funciones analíticas: teoría general

Notación: E, F y X serán espacios de Banach. Para E, B_E denota su bola unidad abierta y E' su espacio dual. Si $U \subset E$ es abierto, $\mathcal{H}(U;F)$ denota el espacio de funciones analíticas de U en F. Cuando $F = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{H}(U)$.

1. Sean $P_k \in \mathcal{P}(^kE, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sea $a \in E$ y $f\colon E \to F$ la función

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} P_k(x-a) \tag{1}$$

Sea r_c el radio de convergencia de f en a $\quad (r_c = r_c(a) = r_c(f,a))$:

$$r_c = sup\{r \geq 0\colon \quad \sum_{k\geq 0} P_k(x-a) \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ en } \bar{B}(a,\rho), \quad \forall \rho < r\}.$$

Mostrar que vale la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$r_c = \frac{1}{\limsup \|P_k\|^{\frac{1}{k}}}.$$

2. Sea $a \in E$ y $f\colon E \to F$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} P_k(x-a)$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE, F)$ y $A_k \in \mathcal{L}_s(^kE, F)$ tales que $\hat{A}_k = P_k$.

   (a) Mostrar que la serie tiene radio de convergencia positivo si y sólo si $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} < \infty$.

   (b) Mostrar que la serie tiene radio de convergencia infinito si y sólo si $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} = 0$.

   (c) Si $E = \ell_1$ y $f(x) = \sum_{k\geq 1} x_1. \cdots .x_k$, entonces $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} = e \limsup \|P_k\|^{\frac{1}{k}}$. Concluir que no puede usarse indistintamente ambos límites superiores para calcular r_c.

3. Sea $(\varphi_k) \subset E'$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{w^*} 0$. Mostrar que $f(x) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k(x)^k$ está en $\mathcal{H}(E)$ es decir, es entera: admite un desarrollo como en (1) para todo $a \in E$ con $r_c(a) > 0$.

4. Sea $(y_k)_{k\geq 0} \subset F$ y sea $f : \mathbb{C} \to F$ la función dada por $f(\lambda) = \sum_{k\geq 0} \lambda^k y_k$. Mostrar que si $f = 0$ en un entorno de $\lambda = 0$ entonces $y_k = 0$ para todo k.

5. Sea $(P_k)_{k\geq 0} \in \mathcal{P}(^kE, F)$, una sucesión tal que la serie $\sum_{k\geq 0} P_k(x-a) = 0$ para todo $x \in B(a, r_c)$ donde $r_c > 0$ es el radio de convergencia. Probar que $P_k \equiv 0$, para todo k.

   Concluir que si $U \subset E$ es un abierto conexo, $f\colon U \to F$ es analítica en U y $a \in U$, el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de a es único.

6. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Sea $S = \{x \in U\colon \frac{1}{k!}\hat{d}^m f(x) = 0, \ \forall k \geq 0\}$. Probar que $S = \emptyset$ o $S = U$.

7. Sea $U \subset E$ abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(U;F)$

   (a) Probar que son equivalentes:

      i. $f \equiv 0$.

      ii. $f|_V \equiv 0$ para algún $V \subset U$, abierto.

      iii. Existe $a \in U$ tal que $\frac{1}{k!}\hat{d}^m f(a) = 0$ para todo $k \geq 0$.

   (b) Mostrar que si $\dim(E) \geq 2$, no vale el resultado que se tiene para funciones de 1-variable compleja: $f(x_n) = 0$ para (x_n) una sucesión con puntos de acumulación, entonces $f \equiv 0$.

8. Sean X, Y dos espacios de Banach y sea $V \subset F$ un abierto. Sean $S \in \mathcal{L}(E; F), T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $f \in \mathcal{H}(V; X)$. Probar que $T \circ f \in \mathcal{H}(V; Y)$ y $f \circ S \in \mathcal{H}(U; X)$, para $U = S^{-1}(V)$.

9. Sea $U \subset E$ abierto y sean $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Mostrar que $f \cdot g \in \mathcal{H}(U)$ y que además si $P_k(\cdot)$ es el polinomio k-homogéneo correspondiente, se tiene
$$P_k(f \cdot g)(x) = \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(f)(x) \cdot P_j(g)(x), \quad \text{para todo } x \in U \text{ y todo } k \geq 0.$$

10. Probar que vale el Teorema de Liouville para $f \in \mathcal{H}(E; F)$. Es decir si f es entera y acotada entonces f es constante. (Sugerencia: para cada $\varphi \in F'$ considerar $g(\lambda) = \varphi(f(\lambda x))$, $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

11. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f \colon U \to \mathbb{C}$, analítica no constante.
    (a) Probar que $f(V)$ es abierto para todo abierto $V \subset U$.
    (Sugerencia: considerar $x, y \in V$ tales que $f(x) \neq f(y)$ (¿por qué se puede?) y el conjunto $\Omega_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon x + \lambda(y - x) \in V\}$.)
    (b) Mostrar que el resultado no es válido si f toma valores en F, con $\dim(F) \geq 2$.

12. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que existe $a \in U$ con $|f(x)| \leq |f(a)|$ para todo $x \in U$.
    (a) Probar que vale el Principio del módulo máximo, es decir f es constante.
    (b) Sea $f \colon \Delta \to (\mathbb{C}^2, \|.\|_\infty)$, dada por $f(z) = (1, z)$. Mostrar que f es una funcíon analítica que alcanza su máximo en todo punto de Δ sin ser constante. Concluir que el Principio 'norma' máxima no es válido si f toma valores en F y $\dim(F) \geq 2$.

<u>Adicionales</u>

13. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, $\mu \geq 0$. Probar que si $f \colon \Omega \to F$, es μ-medible y (f_n) y (g_n) son dos sucesiones de funciones de Ω en F simples μ-medibles, que convergen a f en casi todo punto de Ω y verifican $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega \|g_n - f\| d\mu$ entonces $\lim \int_\Omega f_n d\mu = \lim \int_\Omega g_n d\mu$ y la integral de Bochner de f está bien definida.
    Nota: si μ es una medida signada, se considera la descomposición de $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y se obtiene la definición de función Bochner integrable si (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Análogamente se procede si μ es una medida compleja.

14. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, con Ω un compacto Hausdorff y sea $f \colon \Omega \to F$ una función continua.
    (a) Probar que f puede aproximarse uniformemente en Ω por una sucesión de funciones simples μ-medibles.
    (b) Probar que f es Bochner integrable.