

20.075



* 5 3 0 9 5 4 4 2 3 6 *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

GEOMETRIA DE MEDIDAS Y CONJUNTOS AUTOSEMEJANTES

José Manuel Rey Simó.

Director:

Manuel Morán Cabré.

Tesis doctoral.

Facultad de Matemáticas.

Universidad Complutense.

Madrid, Mayo 1995.

A mi tío Carlos,
A mis padres,
A Carmen,
A quienes debo tanto...

“For any serious purpose, intelligence
is a very minor gift”

G.H. Hardy.

Contenidos

Preámbulo	7
1 Introducción. Marco para la investigación realizada.	23
1.1 Medida y dimensión de Hausdorff.	23
1.2 Medida y dimensión packing.	26
1.3 Dimensión y singularidad de una medida.	27
1.4 Conjuntos y medidas autosemejantes.	30
1.5 Algunas cuestiones de notación.	33
2 La Medida del Solapamiento bajo Condición de Abierto. El Θ-Lema y sus Implicaciones.	35
2.1 Preliminares.	36
2.2 Demostración del Θ -lema.	41
2.3 Implicaciones del Θ -lema.	46

2.3.1	Estructura de los espacios de medida (E, μ_p)	47
2.3.2	Estructura de los sistemas dinámicos (E, T, μ_p) . Una interpretación de la fórmula de dimensión de las medidas autosemejantes en términos de teoría ergódica de sistemas dinámicos.	48
3	Geometría de Medidas Autosemejantes I: Singularidad respecto a la Medida de Hausdorff.	57
3.1	Preliminares. Estimación de las medidas y dimensiones de Hausdorff y packing mediante técnicas locales.	58
3.2	Teoremas de densidad en conjuntos autosemejantes.	61
3.3	Singularidad de las medidas autosemejantes respecto a la medida de Hausdorff en su dimensión.	72
4	Geometría de Medidas Autosemejantes II: Dimensión de la Medida en el Caso Numerable y Continuidad respecto a la Medida Packing en el Caso Finito.	91
4.1	Preliminares.	92
4.2	Dimensión de las medidas autosemejantes. Caso general.	94
4.3	Continuidad de las medidas autosemejantes respecto de la medida packing en el caso finito.	108
5	Geometría de Conjuntos Autosemejantes: Análisis Frecuencial en Conjuntos Autosemejantes. Los Conjuntos de Besicovitch.	123
5.1	Preliminares y Antecedentes.	124

5.2 Conjuntos autosemejantes no-compactos de μ -medida plena. Los conjuntos de Besicovitch. 127

5.3 Otros conjuntos definidos frecuentemente. La dimensión de Hausdorff-Billingsley. 145

6 Conclusiones **157**

Referencias **163**

Preámbulo.

La Teoría Geométrica de la Medida y la Geometría Fractal tienen por objeto el estudio de subconjuntos de espacios métricos (en muchas ocasiones \mathbb{R}^N con la topología usual) ‘excepcionales’ desde el punto de vista de la medida, esto es, conjuntos con medida de Lebesgue nula. Si bien la cuestión general de cómo ocupan el espacio ambiente los conjuntos excepcionales se puede abordar desde diversos frentes, el primer objetivo de las mencionadas disciplinas es ‘calibrar’ el tamaño de éstos conjuntos. Cuando el modo en que se distribuyen es irregular, en el sentido de que están lejos de ser variedades diferenciables, tales conjuntos excepcionales podrían ser denominados genéricamente ‘fractales’. De este modo, la primera cuestión relevante que debe solventarse referente a un conjunto fractal desde el punto de vista de su geometría, consiste en cuantificar la manera en que el conjunto ocupa \mathbb{R}^N .

Las Matemáticas disponen desde principios de siglo [Hau 18] de una herramienta capaz de evaluar de manera precisa el tamaño de un conjunto fractal: la familia de *medidas de Hausdorff* $\{H^t : t \geq 0\}$, y de un parámetro que resume el comportamiento de un conjunto cualquiera frente a esta familia: la *dimensión de Hausdorff*, que se denotará mediante ‘dim’. Otros conceptos de dimensión y/o medida han surgido desde entonces con la misma motivación. Uno de estos conceptos, la *medida y dimensión packing* (se denotarán por P^t y ‘Dim’ respectivamente) introducida por C. Tricot en 1982 [Tri 82], ha recibido especial atención en los últimos años, y su estimación junto con la de la dimensión y medida de Hausdorff es una cuestión estándar en la investigación reciente (las definiciones pueden verse en el capítulo 1).

Lejos de constituir una galería de curiosidades patológicas, como fueron considerados en un principio los conjuntos que Cantor, Peano y otros concibieron alrededor del último cambio de siglo, los conjuntos *excepcionales* han desempeñado un papel relevante en diversas áreas de la matemática de sabor *a priori* diferente al de la geometría fractal. Entre ellas, por citar algunos ejemplos, están las ecuaciones

en derivadas parciales, e.g. en el problema de la singularidad de soluciones de las ecuaciones de la dinámica de fluidos en tres dimensiones [CKN 82]; los sistemas dinámicos, e.g. en el régimen asintótico de muchos sistemas disipativos: los atractores extraños [ER 86]; la variable compleja, en el problema de la eliminación de subconjuntos del dominio de funciones analíticas acotadas [Mat, Car 66]; la teoría de números, e.g. aproximación diofántica, fracciones continuas, distribución de dígitos [Egg 49, Fal 90] (parte de nuestro trabajo tiene gran relación con el último problema mencionado). En los textos de Falconer [Fal 90] y de Guzmán, Martín, Morán y Reyes [GMMR 93] se proporciona una panorámica sobre la ubicuidad de los conjuntos excepcionales tanto en áreas de las matemáticas como de las ciencias aplicadas. Todo ello no hace sino ilustrar la relevancia del problema de la estimación de la medida de tales conjuntos. Cuando un conjunto 'excepcional' aparece en un problema de manera relevante, la primera cuestión de interés es estimar su dimensión y medida de Hausdorff y packing. La relación entre ambos conceptos para el conjunto considerado proporciona valiosa información sobre la estructura geométrica del conjunto.

Una de las áreas que no se ha citado arriba es la teoría de la probabilidad, y sin embargo los ejemplos clásicos de la probabilidad geométrica (aguja de Buffon, paradoja de Bertrand, etc.) sugieren que la conexión entre geometría y probabilidad es ciertamente antigua y fructífera. Más aún, si se considera que el problema primero de la probabilidad, i.e. estimar la probabilidad de los sucesos de interés, se reduce a un problema de medida en \mathbb{R}^N , puede pensarse que en efecto la probabilidad está íntimamente vinculada a la geometría de los conjuntos de \mathbb{R}^N . Aunque esta afirmación sea opinable, debe darse la razón a quien la desestime como justificación para que la probabilidad aparezca en la relación del párrafo anterior. Ello es así porque el problema matriz de la geometría fractal, i.e. la estimación del tamaño de los conjuntos de medida nula, ha sido tradicionalmente desestimado por la probabilidad, que persigue genéricamente situaciones "casi seguras" sin preocuparse precisamente de las excepciones.

Del párrafo anterior puede obtenerse la idea de que la geometría de los conjuntos excepcionales sólo está destinada a jugar un papel anecdótico en probabilidad. Nuestra opinión es definitivamente en el sentido opuesto: creemos que las técnicas de teoría geométrica de la medida pueden aplicarse de manera relevante en prob-

abilidad. Las ideas pioneras de Billingsley [Bil 60], que será una de las referencias básicas de nuestro trabajo, reafirman sin duda esa creencia. La técnica que Billingsley emplea para la 'geometrización de la probabilidad', recuperadas en cierto sentido por Tricot veinte años después, han jugado un importante papel en el desarrollo de la teoría geométrica de la medida.

Por otra parte, en sentido contrario debe afirmarse a ciencia cierta que la probabilidad desempeña hoy día un papel esencial en geometría fractal. La lista de trabajos de este área que hacen uso de resultados de probabilidad y de la teoría de procesos estocásticos es ciertamente extensa: por citar algún ejemplo, [BEH 89, CM 92, Per 94, Fal 94]. Tanto es así que puede decirse que algunos resultados geométricos están pendientes de otros que se formulan en términos estrictamente probabilistas. En nuestro trabajo suceden ambas cosas: resultados clásicos de probabilidad intervienen en la prueba de alguno de los resultados que se presentan en esta memoria; y por otra parte algunos problemas que quedan abiertos se reducen a resolver problemas puramente probabilísticos.

El trabajo que presentamos se sitúa, dentro del área de la teoría geométrica de la medida, en lo que genéricamente puede denominarse *geometría autosemejante*, en alusión al tipo de construcciones geométricas que estudia. La geometría autosemejante está estrechamente vinculada a la probabilidad arriba mencionada, al menos en tres aspectos relacionados y complementarios. Estos tres aspectos se recogen a continuación puesto que en nuestra opinión motivan la naturaleza 'probabilista' de la geometría autosemejante; y además introducen los objetos y las técnicas de que se ocupará esta memoria.

- La primera observación tiene que ver con el modo en que se construyen muchos de los paradigmas de conjuntos 'excepcionales': los conjuntos de tipo Cantor. Se obtiene un continuo de puntos mediante intersección numerable de familias de cerrados disjuntos. Ello proporciona un espacio de códigos abstracto (el conjunto de Cantor abstracto) de manera que cada punto del fractal se identifica con (codifica como) una realización de un proceso estocástico discreto, que tiene lugar en el espacio de códigos. Un conjunto autosemejante se puede entender de modo natural como el conjunto de todas las posibles realizaciones de un proceso estocástico de pruebas repetidas (i.e. de variables independientes

e idénticamente distribuidas). Este es el punto de vista que aquí se adopta, y nos conducirá a considerar subconjuntos relevantes de 'realizaciones especiales' y preguntarse por sus propiedades geométricas.

- Un punto de vista alternativo pero complementario consiste en considerar el conjunto fractal como soporte de la(s) medida(s) de probabilidad que sea(n) relevante(s), y preguntarse por las propiedades geométricas de dicha(s) medida(s). Alternativamente, se puede pensar en la medida de probabilidad de que está dotado el proceso estocástico que 'genera' el conjunto autosemejante como en el párrafo anterior. Ello desplaza la atención de los conjuntos a las medidas, proporcionando en general una aproximación alternativa a la geometría de las distribuciones de puntos/de masa en un espacio métrico. La dualidad medida-conjunto se puede entender como consecuencia de que toda medida de probabilidad está asociada de manera natural a los conjuntos (no necesariamente cerrados) capaces de concentrar toda la masa de la medida, y de que todo conjunto se puede contemplar desde el punto de vista de las medidas que puede 'soportar'. Esta óptica alternativa, que considera las medidas *per se*, y se pregunta por sus propiedades geométricas, ha recibido de hecho gran atención tanto en teoría geométrica de la medida, e.g. análisis multifractal [CM 92, EM 92, Fal 94], IFS recurrentes [BEH 89]; como en otras áreas, e.g. sistemas dinámicos [ER 86], y análisis no-lineal de series temporales [MMR 95] (y referencias allí).
- La tercera observación está en relación a las técnicas geométricas que se emplean para el análisis de las medidas y los conjuntos que nos ocupan. Hay al menos dos modos de obtener estimaciones para la medida y dimensión de Hausdorff y packing: usando recubrimientos (global), y usando densidades (local). El papel relevante que tiene hoy día la dimensión packing se debe a que se comporta localmente de manera dual a la medida Hausdorff, como demostró el profundo trabajo de Tricot a principios de los años ochenta [Tri 82]. La técnica que aquí se usa combina las técnicas geométricas locales, que permiten reducir el cálculo de medidas y dimensiones (una cuestión global) al cálculo de densidades (una cuestión local), con algunos resultados clásicos de probabilidad, que permiten evaluar dichas densidades.

En este trabajo presentamos por tanto propiedades de dimensión y medida de

Hausdorff y packing de medidas y conjuntos autosemejantes. Un conjunto autosemejante es *grosso modo* aquel que se puede escribir como unión de copias a escala de sí mismo. Otro punto de vista es entender los conjuntos y medidas autosemejantes asociados de modo natural a un proceso de Bernouilli (de pruebas repetidas) que tiene lugar en el espacio de códigos abstracto. En concreto, si $M = \{1, 2, \dots, m\}$, y $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ es un vector de probabilidad en M , el espacio de códigos es el espacio producto $M^{\mathbb{N}} := \prod_1^{\infty} M$, y la medida producto asociada a \mathbf{p} es $\nu_{\mathbf{p}} = \prod_1^{\infty} p$, entonces el *conjunto autosemejante* E se obtiene como una proyección continua del espacio $M^{\mathbb{N}}$, $E = \pi(M^{\mathbb{N}})$, donde la aplicación π se define a partir de un sistema de semejanzas contractivas de \mathbb{R}^N $\Psi = \{\varphi_i : i \in M\}$ (ver (1.14) para la definición de π). De modo similar, se obtiene la *medida autosemejante* $\mu_{\mathbf{p}}$ como la proyección mediante π de la medida $\nu_{\mathbf{p}}$, i.e. $\mu_{\mathbf{p}} = \nu_{\mathbf{p}} \circ \pi^{-1}$. Todas las medidas autosemejantes están soportadas en el conjunto compacto E .

Aunque no se asocia usualmente con la idea de autosemejanza, el ejemplo más sencillo de conjunto autosemejante es el intervalo unidad, que desde luego se consigue como unión de m copias de sí mismo a escala m^{-1} . Cada punto en el intervalo está ‘codificado’ de manera natural por la secuencia (infinita cuando hay dos) formada por los coeficientes de su expansión en base m .

La geometría autosemejante recibe intensa atención en la investigación activa en geometría fractal. En nuestro trabajo hemos obtenido resultados sobre geometría autosemejante al menos en los tres aspectos que se han comentado arriba. Estos se detallan separadamente debajo.

En cuanto a la organización de los resultados que contiene esta memoria se debe señalar lo siguiente. En el capítulo 1 se recogen las definiciones que serán de uso común y continuado a lo largo del texto, y no contiene por tanto contribuciones originales. La primera sección de cada capítulo bien presenta y sitúa los problemas que se resuelven en el capítulo en su contexto adecuado (secciones 2.1, 5.1), bien ilustra además las técnicas que se usan, revisando su uso y trascendencia en la literatura (secciones 3.1, 4.1). Se ha preferido insertar en el texto en el momento oportuno los resultados específicos conocidos en la literatura de los que se hace uso. A continuación se detallan estos resultados. En la sección 2.3.2 es necesario el teorema ergódico multiplicativo de Oseledec y la invariancia bajo isomorfismo

de ciertas propiedades de teoría ergódica (que se pueden consultar en [Wal 82] en detalle). La ley del logaritmo iterado se usa en las secciones 3.3, 4.3, y en alguna ocasión en el capítulo 5. La versión que necesitaremos está enunciada en la página 85. Un teorema de S.J. Taylor y C. Tricot de 1985 [TT 85], que se necesitará en la demostración del teorema central del capítulo 4 se enuncia en la página 115. La parte del teorema 3.3.3 referente a la dimensión Hausdorff fue probado en [DGS 92], sin embargo la demostración aquí es algo diferente. Todos los resultados que se enuncian y demuestran en esta memoria, a excepción de los explicitados arriba, son aportaciones originales. Como referencia de uso, los resultados que están numerados dentro de cada capítulo son propios, mientras que los resultados de la literatura que se usan puntualmente (los mencionados arriba) no lo están.

El resto de este capítulo de presentación se dedica a precisar los principales resultados que se incluyen en esta memoria y a poner de manifiesto su relación con la literatura del área. Consideraciones más precisas sobre técnicas, antecedentes, y relevancia de los problemas que se abordan se pueden encontrar en la sección preliminar de cada capítulo.

Resultados sobre la Geometría de Medidas Autosemejantes.

Una medida en \mathbb{R}^N es un objeto abstracto, que se ‘visualiza’ geoméricamente representando los conjuntos que concentran la masa total de la medida. Se debe pensar por tanto en una medida como ‘excepcional’ o ‘fractal’ como aquella que se puede concentrar en un conjunto de medida de Lebesgue N -dimensional nula. En términos clásicos de teoría de la medida éstas se denominan medidas singulares. Hemos encontrado tres tipos de resultados referentes a las medidas autosemejantes: sobre la estructura de los espacios $(E, \mu_{\mathbf{p}})$ como espacios de medida abstractos, relativos a $\mu_{\mathbf{p}}$ como medida invariante y ergódica de un sistema dinámico sobre E , y resultados relativos propiamente a la geometría de $\mu_{\mathbf{p}}$ en \mathbb{R}^N . Los dos primeros tienen implicaciones luego en los aspectos geoméricos de la medida.

Las medidas autosemejantes son genéricamente medidas fractales, o singulares respecto a la medida de Lebesgue. Cuando el conjunto E es disconexo, i.e. la

proyección π es una biyección y por tanto E es topológicamente un conjunto de Cantor, la ley fuerte de grandes números implica que dos medidas autosemejantes son mutuamente singulares. C. Bandt planteó en 1991 [Ban 91] si esta singularidad se mantiene en el caso en que π no es inyectiva, y por tanto hay puntos que tienen códigos múltiples. Al conjunto de puntos de E con múltiples anteimágenes por π se le denomina *conjunto de solapamiento* de E (o del sistema de semejanzas). En general, este es un problema complejo, para el que incluso en el intervalo sólo hay respuestas parciales. En el caso en que se verifica la condición estándar de separación, i.e. la *condición de abierto* (ver 1.15), hemos encontrado la respuesta al problema de Bandt en sentido afirmativo. Es importante notar que, lejos del caso del intervalo expuesto arriba, donde el conjunto de solapamiento es numerable (y por tanto trivial dimensionalmente), el conjunto de tales puntos puede ser muy importante geoméricamente.

En realidad la solución al problema de la singularidad de medidas autosemejante expuesto arriba, es un corolario de un resultado acerca de la estructura del espacio de medida $(E, \mu_{\mathbf{p}})$, que hemos llamado Θ -lema. Como consecuencia directa del Θ -lema, se demuestra que $(E, \mu_{\mathbf{p}})$ es isomorfo como espacio de medida al espacio $(M^{\mathbf{N}}, \nu_{\mathbf{p}})$. Esto tiene implicaciones durante todo el trabajo posterior. Debe señalarse que hay referencias explícitas en la literatura aludiendo al problema de si el conjunto de solapamiento puede concentrar ‘mucho’ medida autosemejante. En concreto, los trabajos sobre descomposición multifractal de Cawley y Mauldin para medidas autosemejantes en construcciones disjuntas [CM 92], de Edgar y Mauldin para medidas markovianas en construcciones dirigidas por grafos [EM 92], y de Falconer para medidas estadísticamente autosemejantes [Fal 94] plantean como problema inicial para extender sus resultados a casos más generales (no-disjuntos) el que la medida del conjunto de solapamiento pueda no ser nula. El Θ -lema demuestra que ese no puede ser el caso para las medidas autosemejantes bajo condición de abierto. Los argumentos empleados para obtener este resultado se pueden extender con seguridad a las medidas consideradas en [EM 92] y [Fal 94].

Un resultado que hace uso esencial del Θ -lema concierne a la teoría ergódica de sistemas dinámicos. El Θ -lema permite definir, cuando se tiene condición de abierto, una aplicación (de hecho muchas) T en E que conjuaga con el shift de Bernouilli en el espacio $M^{\mathbf{N}}$. Más aún, se puede demostrar que el *shift* T preserva la medida $\mu_{\mathbf{p}}$,

y es ergódica respecto a esta medida. Por tanto, la naturaleza de T en E , como transformación que preserva la medida, es la del shift de Bernouilli en $M^{\mathbb{N}}$. En la sección 2.3 probamos un teorema que demuestra que la fórmula de dimensión de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ tiene una interpretación limpia en términos de magnitudes clásicas de teoría ergódica: la entropía de Kolmogorov–Sinai de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$, y los exponentes de Liapunov del par $(T, \mu_{\mathbf{p}})$. Dicha fórmula sintetiza de forma sencilla cómo la geometría de $\mu_{\mathbf{p}}$ se explica en términos de la estocasticidad presente en el sistema dinámico desacoplada en la aleatoriedad global y probabilista medida por la entropía, y en la estocasticidad local y geométrica, producto de la divergencia de órbitas próximas medida por los exponentes de Liapunov. El capítulo 2 está dedicado al Θ -lema y las consecuencias de este resultado explicadas arriba.

Los capítulos 3 y 4 están íntegramente dedicados a la geometría de las medidas autosemejantes en \mathbb{R}^N . Estudiar la geometría de $\mu_{\mathbf{p}}$, el modo en se distribuye en el espacio \mathbb{R}^N , consiste en ‘graduar su singularidad’. El grado de singularidad de una medida (con respecto a la medida de Lebesgue) está dado por su dimensión de Hausdorff (ver sección 1.3 para la definición), $\dim\mu$, que se define como el ínfimo de las dimensiones de conjuntos de μ -medida plena, y por tanto implica que la medida μ es singular respecto a las medidas de Hausdorff H^t si $t > \dim\mu$. En 1992 A. Deliu, J.S. Geronimo, R. Shonkwiler y D. Hardin (DGSB en adelante) encontraron la fórmula para la dimensión de Hausdorff de la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ en el caso en que M es un conjunto finito como arriba (ver [DGSB 92]). Dicha fórmula se expresa sólo en términos de la probabilidad \mathbf{p} y las razones de contracción de las semejanzas. Los autores mencionados encontraron la dimensión de medidas más generales, que comprenden las autosemejantes como caso particular. Más aún, resultados de Tricot [Tri 82] muestran que de hecho el trabajo de DGSB prueba también que la dimensión packing de $\mu_{\mathbf{p}}$ coincide con la dimensión de Hausdorff.

Sea un vector de probabilidad \mathbf{p} fijo, y poner $\mu \equiv \mu_{\mathbf{p}}$. Una cuestión relevante abierta es por tanto decidir si $\mu_{\mathbf{p}}$ es o no singular respecto a la medidas $H^{\dim\mu}$ y $P^{\dim\mu}$. Observar que, del mismo modo que la dimensión de Hausdorff de un conjunto no proporciona información alguna sobre cuál es la medida del conjunto en su dimensión, el valor de la dimensión de Hausdorff (alternativamente packing) de la medida no informa sobre si la medida es singular o no con respecto a la medida $H^{\dim\mu}$ (alt. $P^{\dim\mu}$). En el capítulo 3 (sección 3.3) se demuestra que μ es singular respecto a

la medida de Hausdorff, mientras que en el capítulo 4 se prueba que no lo es respecto a la medida packing (es continua respecto a $P^{\text{Dim}\mu}$, ver 4.3). Estos resultados son en realidad consecuencia de otros más finos, que precisan un refinamiento de las funciones potenciales que se emplean para computar las medidas $H^{\text{dim}\mu}$ y $P^{\text{Dim}\mu}$. Para ello es necesario manejar los conceptos de medida de Hausdorff (y packing) asociados a funciones más generales que las potenciales. Tomemos el caso de las medidas de Hausdorff; del resultado de DGSB se tiene que la medida H^t de un conjunto de μ_p -medida total es cero para cualquier $t > \text{dim}\mu$. Sin embargo, hay medidas de Hausdorff mayores que $H^{\text{dim}\mu}$ pero menores que cualquier H^t con $t < \text{dim}\mu$ arbitrario, que se obtienen usando funciones ‘mayores’ que $\xi^{\text{dim}\mu}$ pero ‘menores’ que cualquier función ξ^t , $t < \text{dim}\mu$, para evaluar el tamaño de los recubrimientos de los conjuntos (ver sección 1.1 para las definiciones precisas). Lo que hemos conseguido es encontrar toda una familia de medidas de Hausdorff, mayores que la medida $H^{\text{dim}\mu}$ pero menores que cualquier medida H^t , $t > \text{dim}\mu$, y tales que miden cero un conjunto que concentra toda la medida μ .

En concreto, si $\mathcal{G} = \{\phi_\alpha(x) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es la familia un-parámetro de funciones de variable real definidas mediante

$$\phi_\alpha(x) = x^{\text{dim}\mu} \exp\left(\alpha(2 \log x^c \log \log \log x^c)^{1/2}\right), \quad (0.1)$$

donde $c = c(p, \Psi)$ es un parámetro fijo que depende de la probabilidad p y del sistema de semejanzas Ψ , hemos demostrado que existe un valor de ‘corte’ $d \equiv d(p, \Psi) > 0$ tal que la medida autosemejante μ es singular respecto a la medida de Hausdorff H^{ϕ_α} si $\alpha < d$, pero absolutamente continua respecto a la medida H^{ϕ_α} si $\alpha > d$. En particular existe un conjunto de μ -medida plena cuya $H^{\text{dim}\mu}$ -medida es nula, y se sigue la singularidad afirmada arriba.

El protocolo para la medida packing es similar. De hecho, es relevante destacar que el resultado que hemos obtenido para la medida packing es ‘simétrico’ respecto del de la medida de Hausdorff explicado arriba: si \mathcal{G} es la familia definida en (0.1) y d es el valor de corte arriba, hemos probado que la medida autosemejante μ es singular respecto a la medida packing P^{ϕ_α} para $\alpha < -d$ y es absolutamente continua respecto a la medida packing P^{ϕ_α} si $\alpha > -d$. En particular la medida μ es absolutamente continua respecto a $P^{\text{Dim}\mu}$, puesto que $\text{Dim}\mu = \text{dim}\mu$.

Hay diversos resultados en la literatura exhibiendo diferencias entre dimensión

y medidas Hausdorff y packing, e.g. [Tri.82, TT 85, ST 88], que contribuyen al igual que sus analogías a una mayor comprensión de la complementariedad entre los dos conceptos. Algunos de estos resultados están descritos en la sección 4.1. Los resultados expuestos arriba (ver corolarios 3.3.8 y 4.3.8), que hemos demostrado en las secciones 3.3 y 4.3, componen conjuntamente otra simetría nada trivial entre ambas medidas, confirmando su carácter dual. Ello sitúa los resultados centrales de estas dos secciones en una corriente actual de gran interés en el área. Es importante destacar que, aunque las técnicas empleadas en los capítulos 3 y 4 son locales, las ideas que subyacen son diferentes.

Hemos extendido el resultado de DGSB en otra dirección. Los argumentos de DGSB dependen esencialmente de que el conjunto M es finito. Los conjuntos autosemejantes generados por sistemas numerables de semejanzas (i.e. $M = \mathbb{N}$ arriba) constituyen un área muy reciente de investigación [Wic 92, Mor iii, MU, Fer]. En la sección 3.1 damos la fórmula para la dimensión de la medida μ_p en este caso. El teorema 4.2.7 demuestra que la fórmula en el caso infinito generaliza la conocida en el caso M finito. Ello requiere el uso de ideas nuevas en la literatura.

Resultados sobre la Geometría de Conjuntos Autosemejantes.

La literatura del área se ha centrado desde 1981 exclusivamente en el estudio de la geometría del conjunto autosemejante E . Se conocen su dimensión de Hausdorff y packing, que coinciden [Fal 90], y se sabe que tiene medida finita y positiva en dicha dimensión. Sin embargo, no se han considerado hasta ahora propiedades geométricas de subconjuntos de E . Como se verá, subconjuntos relevantes de E aparecen naturalmente cuando se consideran diferentes medidas μ_p en E . El trabajo que hemos desarrollado a este respecto puede denominarse genéricamente *análisis frecuencial en conjuntos autosemejantes*. El capítulo 5 de esta memoria está dedicado en su totalidad a este aspecto. Los preliminares del capítulo detallan, más en profundidad de lo que se hace debajo, los bellos antecedentes de algunos de los problemas que se tratan allí.

La motivación para la investigación desarrollada en el capítulo 5 fue intentar caracterizar los puntos ‘típicos’ de un conjunto autosemejante. Es evidente que la ‘tipicidad’ depende de la medida de probabilidad que se considere en E ; sin embargo como se tiene que $0 < H^{\dim E}(E) < +\infty$, la medida $H^{\dim E}$ se puede probabilizar, y parece natural considerar la tipicidad en E con respecto a dicha medida. En el caso particular del intervalo, una pista de cómo resolver este problema la proporcionó E. Borel cuando demostró la ley de los números normales en 1908. La ley fuerte de grandes números demuestra que si se considera el conjunto de puntos x del intervalo con las m frecuencias asintóticas $\delta_i(x)$ de cada dígito $i \in M$ en su expansión m -aria dadas, $\delta_i(x) = p_i$, entonces la μ_p -medida de tales puntos es 1. El conjunto de puntos normales en el sentido de Borel es el que $\delta_i(x) = m^{-1}$, $i \in M$. Si $p_i \neq m^{-1}$ para al menos un i entonces la medida de Lebesgue de tal conjunto es nula, y por tanto el problema natural en teoría geométrica de la medida es encontrar la dimensión de Hausdorff de tales conjuntos ‘excepcionales’. A.S. Besicovitch resolvió este problema para $m = 2$ en 1934 [Bes 34], y H.G. Eggleston encontró la dimensión de Hausdorff de tales conjuntos para $m > 2$ en 1949 [Egg 49].

Nuestro trabajo extiende el concepto de ‘normalidad’ de Borel a conjuntos autosemejantes, y caracteriza un conjunto de puntos ‘Borel-normales’ de E /de Ψ . Asimismo, hemos llamado *conjunto de Besicovitch* de E asociado al vector \mathbf{p} al conjunto proyección por π del conjunto de códigos de $M^{\mathbb{N}}$ que tienen frecuencia asintótica del dígito $i \in M$ dada por p_i . Hemos llamado conjuntos de *Besicovitch-Eggleston* a los conjuntos de Besicovitch del intervalo. Extender los resultados de Besicovitch y Eggleston a los conjuntos autosemejantes no es una cuestión trivial, y tiene la dificultad, con respecto a la construcción en el intervalo, de que en general el conjunto de puntos de códigos múltiples no tiene porqué ser numerable ni siquiera cuando se tiene la condición de abierto. El resultado de DGSB, sin embargo, facilita el trabajo. Hemos encontrado la dimensión de Hausdorff y la dimensión packing de los conjuntos de Besicovitch en E cuando se verifica la condición de abierto. Asimismo, se dan respuestas parciales al problema de encontrar la medida de estos conjuntos en su dimensión. En particular, se demuestra que los conjuntos de Besicovitch-Eggleston tienen medida packing infinito en su dimensión, mientras que su medida de Hausdorff es cero o infinito. El problema de encontrar en general la medida de Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch (en particular de los conjuntos de Besicovitch-Eggleston) permanece abierto.

Los conjuntos de Besicovitch juegan un papel complementario respecto a las medidas autosemejantes, como el conjunto de puntos que concentra toda la medida y que además es autosemejante en el mismo sentido en que E lo es. De nuestro trabajo se desprende que no hay *un* sólo conjunto de puntos típicos de E con respecto a la medida $\mu_{\mathcal{P}}$, sino varios conjuntos que concentran toda la medida (en ese sentido son típicos) y que se pueden caracterizar mediante propiedades frecuenciales asintóticas de las secuencias de códigos de $M^{\mathbb{N}}$ que les corresponden por la proyección π . En particular, uno de estos conjuntos, que hemos llamado *conjunto de Besicovitch fino* concentra toda la medida $\mu_{\mathcal{P}}$, está contenido en el conjunto de Besicovitch correspondiente pero es mucho más pequeño, y tiene propiedades de regularidad mucho más fuertes. Más aún, una propiedad importante de estos conjuntos es que no intersecan al conjunto de solapamiento. En el caso en que dicho conjunto tiene la dimensión de E , tiene la misma medida de Hausdorff y packing que E , y por tanto puede considerarse como el verdadero ‘corazón’ del conjunto E o el conjunto de los puntos ‘super-normales’ de E .

Los conjuntos de Besicovitch (y otros definidos frecuentemente) tienen la misma propiedad de autosemejanza de E : se descomponen en m copias a escala de sí mismos. La diferencia con E es la compacidad, es bien sabido que E es el único compacto autosemejante asociado al sistema de semejanzas Ψ [Hut 81]. Un aspecto importante de nuestro punto de vista es que se obtiene una idea más rica de la geometría autosemejante si se elimina la restricción de la compacidad, de modo que el concepto que cobra relevancia es el de autosemejante de $\mu_{\mathcal{P}}$ -medida plena. A éstos (conjuntos de Besicovitch entre ellos) está dedicada la sección 5.2. Algunos resultados serán generales para la clase de conjuntos autosemejantes en este sentido más amplio.

Otros conjuntos definidos frecuentemente, no necesariamente en términos del comportamiento asintótico de las frecuencias de cada $i \in M$, ni concentrando la medida $\mu_{\mathcal{P}}$, se definen en la sección 5.3 y se estudian sus propiedades de dimensión. El trabajo de Billingsley [Bil 60, Bil 61] introduciendo la dimensión de Hausdorff en teoría de probabilidad, se usa allí para obtener la dimensión de algunos conjuntos de $\mu_{\mathcal{P}}$ -medida nula.

Resultados sobre las Técnicas Locales para Estimación de Medida y Dimensión en Geometría Autosemejante.

El último aspecto que debe destacarse sobre la investigación que hemos llevado a cabo es relativo a las técnicas que se han empleado para obtener los resultados sobre las propiedades geométricas de medidas y conjuntos expuestos arriba.

La técnica del capítulo 3 es local, y se remonta al trabajo de C.A. Rogers y S.J. Taylor [RT 61]. La idea consiste *grosso modo* en definir una densidad local de una medida μ en un punto x respecto a cada dimensión. Esta densidad evalúa el comportamiento local de la medida μ de un entorno de un punto respecto al tamaño geométrico del entorno, que se mide como función del diámetro. El teorema de densidad que Rogers y Taylor probaron afirma que si se entiende el comportamiento típico (i.e. μ -a.e.) de la densidad de la medida μ se obtiene información sobre su singularidad respecto a la medida de Hausdorff que corresponde con la dimensión sondeada. Rogers y Taylor demostraron su teorema para medidas de Borel y una densidad definida sobre entornos rectangulares. Para conseguir nuestros resultados, se ha de extender el resultado de Rogers-Taylor a densidades definidas *ad hoc* para construcciones autosemejantes. Previamente por tanto se ha de definir una densidad geométrica para los puntos de E que funcione en el contexto que nos interesa, y demostrar entonces un teorema de densidad *à la* Rogers-Taylor para la función de densidad considerada. Esto se hace en las secciones 3.3 y 3.2 respectivamente.

El teorema de densidad que hemos probado (teorema 3.2.3) tiene utilidad en general en el estudio de la geometría autosemejante. En ocasiones, los resultados de dimensión y/o medida de los conjuntos se consiguen encontrando una medida adecuada que tiene un comportamiento local (dado por la densidad) que se entiende bien. Un resultado como el teorema 3.2.3 es pues importante si la medida autosemejante 'funciona bien' en el caso concreto que se considera. En la sección 5.3 se encuentra la dimensión de algunos conjuntos usando como herramienta auxiliar una medida autosemejante adecuada.

Con el objeto de mejorar la técnica que proporciona el teorema 3.2.3 para el cómputo de la dimensión de Hausdorff debilitamos las hipótesis del teorema. En primer lugar, se formula un teorema de densidad logarítmico que, a diferencia del

3.2.3, sólo es capaz de estimar dimensión (esto se hace en la sección 3.2). En segundo lugar, se elimina la hipótesis de que el conjunto sea de μ_p -medida positiva para obtener una estimación inferior de la dimensión de Hausdorff. Ello conduce a considerar el concepto de dimensión de Hausdorff–Billingsley. Creemos que esta es una idea que no se ha explotado suficientemente en la literatura, y que podría resultar importante en casos donde el conjunto objetivo tiene medida cero (debe ser sin embargo ‘grande’ dimensionalmente en términos de la dimensión de Hausdorff–Billingsley, ver sección 5.3).

Los resultados del capítulo 4 se consiguen también mediante técnicas locales, reduciendo la densidad que hemos definido en autosemejantes a densidades sobre bolas, para las que existen teoremas de densidad bien conocidos [TT 85, ST 88]. Para conseguir esto se introduce una nueva técnica que sirve para cubrir bolas centradas en puntos $x \in E$ mediante cilindros (i.e. básicamente imágenes a escala de E , ver (1.23)). Esta técnica, que hemos llamado de *bola viajera* nos sirve en el capítulo 4 para encontrar la dimensión de las medidas autosemejantes en el caso general, y mostrar la continuidad respecto a la medida packing en su dimensión en el caso finito. Probablemente la técnica de bola viajera sea relevante en otros problemas planteados en geometría fractal.

Las técnicas locales usadas han resultado ciertamente potentes, reduciendo la estimación de la dimensión/medida a la de la densidad, que a su vez se traduce en una cuestión de probabilidad de ley tipo fuerte: ley de grandes números y ley de logaritmo iterado. Aquí la probabilidad se muestra importante una vez más. Una revisión con cierto detalle de las técnicas locales, y de sus antecedentes está dada en la sección 3.1.

Llegar a este momento es una de las mayores satisfacciones que proporciona un proceso tan particular como es escribir una tesis doctoral. Uno compone un cuadro nítido con los detalles diluidos que han formado parte cotidiana de su vida durante los últimos cuatro años, y siente una satisfacción indecible al dar las gracias.

Gracias al departamento de Análisis Económico de la Universidad Complutense, y

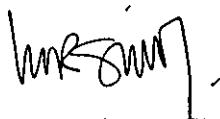
en particular a Emilio Cerdá, por las facilidades que desde el principio y sin reserva me ha dado para llevar a cabo este trabajo. Gracias también al departamento de Análisis de la facultad de Matemáticas, y en especial a Baldomero Rubio, por su amabilidad y apoyo constante.

Gracias de corazón a Indalecio, McCarmen, Bernardo, a quienes sin remedio he de considerar mis amigos; y a Mercedes, Antonio, Julio, que considero mis amigos sin remedio. Gracias muy especiales a Miguel Angel, por su visión tan lúdica de los conjuntos que proyectan medida nula. Mi cómplice agradecimiento a Gela y Manolo, con los que espero tener la suerte de seguir trabajando muchos años. Todos ellos hacen que cada día se parezca más al anterior que al siguiente.

Mi más profundo agradecimiento es para Manuel Morán. Mi formación ha tenido la fortuna inmensa de contar con su brillantez como matemático y su calidad como ser humano. Trabajar con él no sólo me ha confirmado que se puede disfrutar haciendo matemáticas, sino algo más importante: que se puede disfrutar sin hacerlas; y me ha enseñado incluso algo más difícil: que se puede disfrutar con las matemáticas aún cuando las matemáticas se resisten a 'dejarse hacer'. Los momentos que hemos pasado juntos pensando sobre los problemas que aquí se abordan, permanecerán sin duda para siempre entre los momentos más intensos de mi vida.

Gracias es muy poco para Carmen y mis amigos, que se han esforzado generosamente en que no me volviera idiota... y casi lo logran. En particular gracias a la 'dinámica Simó', y por mantener al menos un gen sano.

Mi más íntimo débito al genio único de mi tío Carlos, responsable de este trance en gran medida, y a quien está dedicado este trabajo de manera muy especial, desde que se fue 'esto' no tiene el mismo sentido...



José Manuel Rey Simó,

Madrid, Mayo de 1995

Capítulo 1

Introducción. Marco para la investigación realizada.

En este capítulo se recogen los conceptos básicos de teoría geométrica de la medida que se usarán durante toda esta memoria. Los conceptos y resultados que sean necesarios en alguna ocasión a lo largo del texto se definirán oportunamente.

1.1 Medida y dimensión de Hausdorff.

Dado $A \in \mathbb{R}^N$ y $\delta > 0$, se recubre A con una colección (a lo más numerable) $\{U_i\}_i$ de conjuntos de diámetros $|U_i| \leq \delta$ (la notación $|\cdot|$ se usa para el diámetro de un conjunto). Tal colección se denomina δ -recubrimiento de A . Para $t \geq 0$, la medida de Hausdorff t -dimensional en \mathbb{R}^N se define como extensión natural de la definición de la medida de Lebesgue L^N . Para un ‘grado de resolución’ $\delta > 0$ se recubre el conjunto A mediante conjuntos arbitrarios de diámetro no mayor que δ y se evalúa el ‘tamaño’ t -dimensional del recubrimiento. i.e. $\sum_i |U_i|^t$. Se escoge la suma ‘más eficaz’, que se denomina $\mathbf{H}_\delta^t(A)$

$$\mathbf{H}_\delta^t(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^t : \{U_i\}_i \text{ } \delta\text{-recubrimiento de } A \right\}. \quad (1.1)$$

La *medida t -dimensional de Hausdorff* se define entonces como el límite en (1.1) cuando la resolución se hace cero, i.e.

$$\mathbf{H}^t(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{H}_\delta^t(A) = \sup_{\delta > 0} \mathbf{H}_\delta^t(A), \quad (1.2)$$

donde el límite es en realidad un supremo, dado que $\mathbf{H}_\delta^t(A)$ es claramente no-decreciente como función de δ . Observar que la medida \mathbf{H}^t generaliza la medida de Lebesgue a dimensiones no enteras.

La *dimensión de Hausdorff* de A está dada mediante

$$\dim(A) = \sup\{t : \mathbf{H}^t(A) = +\infty\} = \inf\{t : \mathbf{H}^t(A) = 0\}, \quad (1.3)$$

de manera que $\dim(A)$ es un valor que resume el comportamiento de A respecto a la familia paramétrica de medidas $\{\mathbf{H}^t\}_{t \geq 0}$. Es importante destacar que el cálculo de la dimensión de A no aporta información ninguna sobre la medida de A en su dimensión $\mathbf{H}^{\dim A}(A)$, de modo que cuando se encuentra la dimensión de un conjunto una segunda tarea más fina (y generalmente más ardua) consiste en decidir cuál es el valor de la medida del conjunto en su dimensión. La situación en que un continuo de puntos $A \subset \mathbb{R}^N$ arbitrario arroja un valor finito y positivo en el proceso para obtener (1.2) usando precisamente una función potencial del diámetro es ciertamente muy particular. Debe considerarse por tanto como probable el hecho de que la medida $\mathbf{H}^{\dim A}(A)$ sea cero o infinito. Esto conduce a admitir en el proceso de definición en (1.1)–(1.2) una clase de funciones del diámetro de los conjuntos más amplia que las potenciales, y por tanto considerar medidas de Hausdorff más generales.

En este trabajo necesitaremos esa noción más ‘fina’ de *medida de Hausdorff asociada a la función de dimensión ϕ* , o ϕ -medida de Hausdorff. Se define el conjunto de funciones de dimensión \mathcal{F} como

$$\mathcal{F} = \{\phi : (0, \delta) \mapsto \mathbb{R}^+ / \phi \text{ continua creciente } \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \phi(\xi) = 0, 0 < \delta < 1\}. \quad (1.4)$$

Consideraremos además recubrimientos usando sólo bolas, de modo que la ϕ -medida de Hausdorff esférica de A se define como

$$H^\phi(A) = \sup_{\delta > 0} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi(|B_i|) : \{B_i\}; \delta\text{-recubrimiento de } A \text{ por bolas} \right\}. \quad (1.5)$$

La expresión dentro del supremo se denota mediante $H_\delta^\phi(A)$, y es no-decreciente como función de δ .

Para $\phi \in \mathcal{F}$ verificando

$$\limsup_{\xi \rightarrow 0} (\phi(2\xi)/\phi(\xi)) := \phi^* < +\infty, \tag{1.6}$$

la medida H^ϕ es comparable a la medida de Hausdorff estándar \mathbf{H}^ϕ , que se obtiene tomando el ínfimo en (1.5) sobre δ -recubrimientos formados por conjuntos cualesquiera de \mathbb{R}^N , como en (1.1). Ambas medidas son comparables o equivalentes en el sentido de que

$$(\phi^*)^{-1}H^\phi(A) \leq \mathbf{H}^\phi(A) \leq H^\phi(A) \tag{1.7}$$

(ver [Fal 90]) de modo que ambas son finitas y/o positivas simultáneamente. La medida esférica H^ϕ se usará durante toda esta memoria.

Si $\phi(\xi) = \xi^t$, ponemos H^t para la medida de Hausdorff esférica t -dimensional. Es claro que el valor de la dimensión de Hausdorff es el mismo si se usa en la definición (1.3) cualquier medida comparable a H^t (usualmente se define ‘dim’ en términos de las medidas de Hausdorff \mathbf{H}^t).

Dado $A \subset \mathbb{R}^N$, el modo en que usualmente se encuentra en la práctica la función de dimensión que consigue que $0 < H^\phi(A) < +\infty$ es el siguiente. En primer lugar se encuentra la dimensión. En ocasiones, como en el caso de los conjuntos autosemejantes [GMMR 93], se obtiene la dimensión $\dim A = a$ como consecuencia de que la medida $H^a(A)$ es finita y positiva. En otras ocasiones se encuentra la dimensión de A demostrando que $H^t(A) < +\infty$ para $t > a$, y que $H^t(A) > 0$ para $t < a$, de modo que no hay información en dimensión a . Supongamos que por algún método se encuentra que $H^a(A) = 0$. Por tanto para todo $\delta > 0$ existe un δ -recubrimiento \mathcal{U}_δ de A tal que $\sum_{U \in \mathcal{U}_\delta} |U|^a = 0$. Se debe encontrar una función g tal que para algún $\delta > 0$ $\sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^a g(|U|) > 0$ para todo δ -recubrimiento \mathcal{U} de A , y por tanto necesariamente $\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = +\infty$. Sin embargo, puesto que se sabe que $\sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^t = 0$ para todo $t > a$, la función g debe verificar que $\lim_{\xi \rightarrow 0} \log g(\xi)/\log \xi = 0$. La función $\phi(\xi) = \xi^a g(\xi)$ se comporta por tanto ‘logarítmicamente’ como la función potencial ξ^a , i.e. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \log \phi(\xi)/\log \xi = a$. Sin embargo, como $\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = +\infty$ es ‘mayor’ (asintóticamente) que ξ^a , i.e. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^a/\phi(\xi) = 0$, y por tanto la medida de Hausdorff H^ϕ es mayor o igual que H^a . Se puede decir en este caso que la función ϕ

proporciona un 'refinamiento a la izquierda' de la función potencial ξ^α , puesto que las medidas $\{H^t : t \geq 0\}$ se ordenan clásicamente de mayor a menor. Si además se demuestra que para algún δ -recubrimiento \mathcal{U} se tiene $\sum_{U \in \mathcal{U}} \phi(|U|) < +\infty$, se dice que ϕ es la función de dimensión de A .

En nuestro caso, técnicas probabilistas proporcionarán de modo natural un refinamiento a la izquierda para la función potencial de la dimensión de la medida autosemejante (ver la función definida en (3.36)).

Para detalles sobre las definiciones y propiedades de las medidas y dimensión de Hausdorff puede consultarse [Rog 70, Fal 85].

1.2 Medida y dimensión packing.

En 1982 C. Tricot [Tri 82] introdujo las medidas packing o de empaquetamiento, y demostró que desempeñan un papel 'dual' (localmente) a las medidas de Hausdorff (el resultado de Tricot puede verse en la sección 3.1). Desde entonces, su cálculo se ha convertido en una cuestión estándar, y complementario al de la medida de Hausdorff, a resolver en los problemas de teoría geométrica de la medida [TT 85, Fal 90, CM 92, EM 92, Fal 94].

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, y $\delta > 0$, un δ -'packing' (o δ -empaquetamiento) de A es una familia de bolas $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ disjuntas centradas en puntos de A , con $|B_i| < \delta$. Para $\phi \in \mathcal{F}$, se define la ϕ -pre-medida packing de A como

$$p^\phi(A) = \inf_{\delta > 0} \sup \left\{ \sum_i \phi(|B_i|) : \{B_i\}_i \text{ } \delta\text{-packing de } A \right\}.$$

La premedida p^ϕ no es σ -subaditiva, lo que motiva la siguiente definición. Se define la *medida packing de A asociada a la función de dimensión ϕ* (o ϕ -medida packing de A) como

$$P^\phi(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} p^\phi(A_i) : \bigcup_i A_i \supseteq A, \{A_i\}_i \text{ arbitraria} \right\}. \quad (1.8)$$

Así, P^ϕ es una medida de Borel en \mathbb{R}^N , en particular σ -subaditiva. Si $\phi(\xi) = \xi^t$, la ϕ -medida packing correspondiente se denota por P^t y se llama *medida packing*

t-dimensional. Las medidas packing tienen las mismas propiedades que las medidas de Hausdorff, en particular son medidas exteriores, y por tanto todo conjunto de \mathbb{R}^N es medible.

La *dimensión packing* de A , que denotaremos en adelante por $\text{Dim}(A)$, se obtiene ahora como el parámetro crítico que clasifica la familia $\{P^t\}_{t \geq 0}$ en dos subclases, aquellas que dan a A medida nula y las que dan medida infinito, esto es

$$\text{Dim}(A) = \sup\{t : P^t(A) = +\infty\} = \inf\{t : P^t(A) = 0\}. \quad (1.9)$$

Es bien sabido que $\dim(A) \leq \text{Dim}(A)$ para cualquier $A \in \mathbb{R}^N$. S.J. Taylor propuso el nombre de conjunto ‘fractal’ para aquellos para los que ambas dimensiones coincidían. Todas las observaciones que se hicieron en la sección anterior para la medidas generalizadas de Hausdorff son aplicables para las medidas packing. Para las propiedades en más detalle de la medida y de la *dimensión packing* se puede consultar [Edg 90, TT 85, Rey 92].

1.3 Dimensión y singularidad de una medida.

Cuando el objeto que se considera es una medida (de Borel) distribuida en \mathbb{R}^N , el interés desde nuestro punto de vista consiste en abordar su geometría. La medida Lebesgue sigue teniendo un papel relevante en la geometría de \mathbb{R}^N pero, al igual que sucede con los conjuntos excepcionales, éste se diluye cuando la medida de interés es singular respecto a la medida de Lebesgue. Las medidas singulares con respecto a la de Lebesgue juegan ahora el papel de medidas ‘excepcionales’. Se trata pues de graduar esa ‘excepcionalidad’.

La teoría geométrica de la medida provee de una útil herramienta para evaluar el grado de singularidad de una medida: su *dimensión*. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R}^N . Se define la *dimensión de Hausdorff* de μ mediante

$$\dim_1 \mu = \inf\{\dim A : \mu(A) = 1\}, \quad (1.10)$$

es decir, $\dim \mu$ estima el tamaño mínimo (medido mediante *dimensión de Hausdorff*) de un conjunto capaz de ‘representar’ toda la medida μ .

Análogamente, se define la *dimensión packing* de μ como

$$\text{Dim}_1\mu = \inf\{\text{Dim}A : \mu(A) = 1\}. \quad (1.11)$$

Por supuesto, como consecuencia de las propiedades de la dimensión packing se tiene $\text{dim}_1\mu \leq \text{Dim}_1\mu$. Extendiendo la idea de Taylor, se puede considerar que una medida es ‘fractal’, o que goza de ciertas propiedades de regularidad, si su dimensión Hausdorff y packing coinciden. El concepto de ‘regularidad’ de una medida que introdujo Cutler [Cut 90], que difiere de éste, se explicará en la sección 4.1.

Puede verse [You 82] que si μ es una medida ergódica invariante para un C^1 -difeomorfismo entonces la definición (1.10) es equivalente a

$$\text{dim}\mu = \inf\{\text{dim}A : \mu(A) > 0\}. \quad (1.12)$$

Se puede demostrar, usando el Θ -lema (teorema 2.2.2 de la sección 2.2) y propiedades ergódicas, que esta afirmación es cierta en nuestro contexto, tanto para la dimensión de Hausdorff como packing. Usaremos la definición (1.12) para la dimensión de Hausdorff de la medida, y su equivalente para la dimensión packing.

Al igual que sucede con los conjuntos (o como consecuencia de ello) hay diversas formas de dimensionar una medida. Las dimensiones definidas arriba son las de uso más frecuente en la literatura. El concepto de dimensión de medidas como se maneja hoy día parece surgir a principios de los años ochenta, en conexión con problemas ergódicos en sistemas dinámicos que relacionan diversas magnitudes ergódicas entre sí. Parece ser Young el primero en considerar la dimensión de la medida como se ha definido arriba. En concreto, Young [You 82] considera éste, adapta otros varios conceptos de dimensión al caso de medidas, y obtiene igualdad para todos ellos en el caso de que μ sea una medida de probabilidad de Borel definida en una variedad Riemanniana compacta. Una revisión reciente sobre resultados rigurosos acerca de la dimensión geométrica de medidas se puede ver en [Haa] o en [Cut 90].

Los conceptos de dimensión definidos evalúan efectivamente el grado de singularidad de la medida μ . Para verlo, se introducen las siguientes definiciones, introducidas en [RT 61] para el caso de medidas Hausdorff. Sea μ una medida en \mathbb{R}^N con σ -álgebra \mathcal{A} .

- Se dice que μ es *continua con respecto a la medida de Hausdorff* H^ϕ , o H^ϕ -continua (alternativamente, continua con respecto a la medida packing P^ϕ , o P^ϕ -continua), si $\mu(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ tal que $H^\phi(B) = 0$ (alt. $P^\phi(B) = 0$).
- Se dice que μ es *singular respecto a* H^ϕ (alt. singular respecto a P^ϕ), si existe un \mathcal{A} -medible B_0 con H^ϕ -medida nula (alt. P^ϕ -medida nula) que concentra la medida μ , i.e. $\mu(B) = \mu(B \cap B_0)$ para todo $B \in \mathcal{A}$.

Cuando $\phi(\xi) = \xi^N$, la medida de Hausdorff H^N es esencialmente la medida de Lebesgue N -dimensional (en el sentido de que ambas medidas son comparables, ver e.g. [Fal 85]), y por tanto los conceptos de H^N -singularidad y H^N -continuidad de la medida μ son los de singularidad y continuidad absoluta en el sentido clásico (i.e. respecto a la medida de Lebesgue).

A continuación se muestra cómo la dimensión de la medida μ gradúa de hecho la singularidad respecto a la familia de medidas de Hausdorff o packing. Tomemos, por ejemplo la dimensión de Hausdorff $\dim\mu$. Los razonamientos son paralelos para la dimensión packing. El parámetro $\dim\mu$ clasifica el comportamiento de la medida μ respecto a la familia de medidas $\{H^t\}_{t \geq 0}$. Mas en concreto, si $t > \dim\mu$ entonces existe un conjunto A de μ -medida plena tal que $H^t(A) = 0$, y por tanto la medida μ es singular respecto a la medida H^t . Por otra parte, si $t < \dim\mu$ se tiene $H^t(A) = +\infty$ para todo conjunto A con μ -medida positiva, y por tanto si $H^t(A) = 0$ entonces $\mu(A) = 0$. Esto es decir que μ es continua respecto a H^t . Así, la dimensión $\dim\mu$ es el valor umbral tal que la medida μ es *singular* con respecto a la medida de Hausdorff H^t si $t > \dim\mu$, y μ es *continua* con respecto a la medida H^t si $t < \dim\mu$.

Obsérvese que, como sucede con la dimensión de un conjunto, el parámetro $\dim(\mu)$ no proporciona ninguna información sobre si μ es o no singular con respecto a la medida $H^{\dim\mu}$. Decidir si una medida es o no singular respecto a la medida de Hausdorff en su dimensión es el problema paralelo a decidir si un conjunto tiene medida positiva o nula en su dimensión.

1.4 Conjuntos y medidas autosemejantes.

La investigación que hemos desarrollado tiene como objeto de estudio los conjuntos y medidas que se presentan en esta sección. Los conjuntos autosemejantes fueron introducidos formalmente como se hace aquí en el año 1981 por J.E. Hutchinson [Hut 81]. Sin embargo, algunos hechos sobre su dimensión son conocidos desde el año 1946 [Morn 46]. Las medidas autosemejantes también fueron introducidas por Hutchinson, pero no recibieron el nombre de autosemejante hasta más tarde. Parece que el término ‘medida autosemejante’ se usa por primera vez en las notas de C. Bandt [Ban 91]. Los conocidos IFS con probabilidades de M. Barnsley [Bar 88, BEH 89] no son sino el conjunto autosemejante dotado de una medida autosemejante.

Se considera \mathbb{R}^N con la métrica usual, d . Una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es una semejanza si existe $r > 0$ tal que $d(\varphi(x), \varphi(y)) = rd(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$. La semejanza es contractiva si $r < 1$, en cuyo caso r se denomina (razón de contracción) de φ .

Sea ahora $M = \{1, 2, \dots, m\}$, y sea $\Psi = \{\varphi_i : i \in M\}$ un sistema de m semejanzas contractivas. Denotaremos mediante $\mathcal{S}(M, N)$ el conjunto de tales sistemas. Hutchinson demostró en 1981 que existe un único compacto E invariante para la aplicación de conjunto

$$S\Psi(\cdot) := \bigcup_{i \in M} \varphi_i(\cdot). \quad (1.13)$$

Así $E = \bigcup_{i \in M} \varphi_i(E)$ de modo que, para cada $k \in \mathbb{N}$, E se descompone en unión de m^k copias semejantes a sí mismo de la forma

$$\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(E),$$

con $i_j \in M$ para $1 \leq j \leq k$. E se llama el *conjunto autosemejante generado por Ψ* . El punto de vista que aquí se adopta es el que considera E como la imagen continua de un conjunto de Cantor abstracto (el espacio de códigos). En concreto, se denota por $M^{\mathbb{N}}$ el espacio producto infinito $\prod_1^{\infty} M$. Existe una aplicación sobreyectiva $\pi : M^{\mathbb{N}} \mapsto E$ definida mediante

$$\pi(\mathbf{i}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(E)), \quad (1.14)$$

para cada $i = (i_1, i_2, \dots) \in M^{\mathbb{N}}$.

En este trabajo se presentan algunos resultados para el caso en que $M = \mathbb{N}$. En este caso toda la anterior teoría se mantiene, como se puede ver en [Mor i], cuando el sistema Ψ es compacto con la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados. En este caso el conjunto $M^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto es el espacio nulo de Baire.

Se dice que el sistema Ψ verifica la *condición de abierto* si existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$S\Psi(V) \subseteq V \tag{1.15}$$

y además

$$\varphi_i(V) \cap \varphi_j(V) = \emptyset \text{ para } i, j \in M \text{ con } i \neq j. \tag{1.16}$$

Obsérvese que esta condición de separación comprende en particular las construcciones, como el conjunto de Cantor, disjuntas. Denotaremos en adelante la adherencia \bar{V} mediante F . Sin pérdida de generalidad se supondrá que el abierto V tiene diámetro 1, i.e. $|V| = 1$. La condición de abierto se asumirá para el sistema Ψ durante toda la presente memoria.

El *conjunto de solapamiento* de E , o más propiamente del sistema Ψ es el conjunto

$$\Theta = \bigcup_{i \neq j} (\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E)). \tag{1.17}$$

Se suele denomina a Θ conjunto de solapamiento primario, y conjunto de solapamiento a secas al conjunto donde la proyección π no es inyectiva. En el capítulo 2 se da la relación entre ambos conjuntos cuando se verifica condición de abierto.

Para cada $i \in M$, sea $r_i < 1$ la razón de contracción de φ_i . Sea s el único número real tal que

$$\sum_{i \in M} r_i^s = 1, \tag{1.18}$$

donde r_i es la razón de contracción de la semejanza φ_i , $i \in M$. Si la condición de abierto se sostiene para el sistema Ψ , se sabe [Hut 81] que la dimensión de Hausdorff de E está dada por s . En el caso $M = \mathbb{N}$ el valor de s en (1.18) podría no estar definido (ver [Mor i]), de modo que (1.18) se exigirá como hipótesis. La

construcción de E presentada, así como las propiedades de medida y dimensión que aquí se necesitarán de los conjuntos autosemejantes puede consultarse en [Fal 90, GMMR 93].

Sea $\mathcal{P}^+ \subset \mathbb{R}^m$ el conjunto de vectores de probabilidad positivos, i.e.

$$\mathcal{P}^+ = \{\mathbf{p} = (p_i)_{i \in M} : p_i > 0 \text{ para todo } i \in M, \sum_{i \in M} p_i = 1\}. \quad (1.19)$$

Dado $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, se considera la medida de probabilidad producto en $M^{\mathbb{N}}$ (se llama en ocasiones medida de Bernouilli [Haa])

$$\nu_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \mathbf{p} \times \mathbf{p} \times \dots, \quad (1.20)$$

donde $\mathbf{p}(i) = p_i$, $i \in M$ es la medida de probabilidad en M dada por \mathbf{p} . Se llama *medida autosemejante asociada al par* (Ψ, \mathbf{p}) , que denotaremos por $\mu_{\mathbf{p}}$, a la medida producto con soporte en E proyectada o inducida por π , es decir

$$\mu_{\mathbf{p}}(A) = \nu_{\mathbf{p}} \circ \pi^{-1}(A) \quad (1.21)$$

para todo $A \subset \mathcal{C}_{\pi}$ en la σ -álgebra inducida por la σ -álgebra producto en $M^{\mathbb{N}}$, \mathcal{C} , i.e. $A \in \mathcal{C}_{\pi}$ si $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{C}$. Omitiremos el subíndice \mathbf{p} de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ frecuentemente, cuando \mathbf{p} esté fijo en los razonamientos.

Denotaremos por $\mathcal{M}^+ = \{\mu_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in \mathcal{P}^+\}$ al conjunto de medidas autosemejantes con soporte E . La elección

$$\mathbf{p} = (r_i^s : i \in M) \quad (1.22)$$

proporciona una medida de probabilidad en M debido a (1.18), que se denotará por \mathbf{p}_s ; mientras que la medida inducida en E se llamará μ_s . Dicha medida, que es esencialmente la medida de Hausdorff H^s (ver la proposición 5.2.8), se ha llamado ‘natural’ [BG 92] y ha sido la que mayor atención ha recibido de las medidas de la familia \mathcal{M}^+ hasta que el análisis multifractal de las medidas autosemejantes en general ha centrado gran parte de la atención de la investigación [Fal 90, CM 92, EM 92, Fal 94].

M. Barnsley [Bar 88] llama al par (Ψ, \mathbf{p}) *sistema de funciones iterado con probabilidades* (IFS con probabilidades). J.E. Hutchinson [Hut 81] introdujo una teoría paralela a la de los conjuntos autosemejantes para obtener la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ como la

única medida invariante de un operador sobre el espacio de medidas de probabilidad de Borel sobre un compacto. En la sección 3.2 se generaliza el trabajo de Hutchinson al caso numerable.

1.5 Algunas cuestiones de notación.

Finalizamos este capítulo de introducción con algunas cuestiones de notación. La σ -álgebra \mathcal{C} es la generada por la clase de los *cilindros*, que definimos a continuación. Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, $M^k := M \times M \times \dots \times M$. Denotaremos por M^* el conjunto de todas las sucesiones finitas formadas con elementos de M . Dada una sucesión finita $\mathbf{j} \in M^k$ se define el *cilindro* (\mathbf{j}) como el conjunto de códigos de $M^{\mathbb{N}}$ cuya secuencia inicial coincide con \mathbf{j} , i.e.

$$(\mathbf{j}) = \{(j_1, j_2, \dots, j_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots) : i_q \in M, q > k\}. \quad (1.23)$$

Dada la secuencia $\mathbf{j} \in M^k$ escribiremos $\varphi_{\mathbf{j}}$ para denotar la composición de semejanzas

$$\varphi_{\mathbf{j}} = \varphi_{j_1} \circ \varphi_{j_2} \circ \dots \circ \varphi_{j_k},$$

y $r_{\mathbf{j}}$ para denotar su razón de contracción $r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_k}$ ($r_{\mathbf{j}}$ es la razón de contracción de la semejanza $\varphi_{\mathbf{j}}$). Para un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, el conjunto $A_{\mathbf{j}}$ es el conjunto imagen de A por $\varphi_{\mathbf{j}}$, i.e. $A_{\mathbf{j}} = \varphi_{\mathbf{j}}(A)$. Dado $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots) \in M^{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{i}(k)$ denotará la secuencia truncada $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in M^k$. Si $\mathbf{i} \in M^n$ con $n > k$ el significado de $\mathbf{i}(k)$ es el obvio.

Observar que la colección de cilindros $\{(\mathbf{i}(k))\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma una base de entornos para \mathbf{i} en la topología producto. Notar que para cada $x \in E$ existe al menos una secuencia $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$ que proyecta en x por la aplicación π ; de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un compacto $E_{\mathbf{i}(k)} = \varphi_{\mathbf{i}(k)}(E)$ que contiene a x y que es la proyección del cilindro $(\mathbf{i}(k))$ por π . La familia $\{E_{\mathbf{i}(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de hecho una clase de Vitali para x (ver [Fal 85]). Llamaremos también *cilindros (geométricos)* a los conjuntos $E_{\mathbf{i}(k)}$ (e incluso a los conjuntos $F_{\mathbf{i}(k)}$).

Capítulo 2

La Medida del Solapamiento bajo Condición de Abierto. El Θ -Lema y sus Implicaciones.

Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ un sistema de semejanzas contractivas de \mathbb{R}^N , y sea E el conjunto autosemejante generado por Ψ . Θ denota el conjunto de solapamiento asociado a Ψ (ver (2.1) para la definición). Sea \mathbf{p} un vector de probabilidad en M , y $\mu_{\mathbf{p}}$ la medida autosemejante inducida por \mathbf{p} y soportada en E . Este capítulo concierne a la $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida del conjunto de solapamiento Θ cuando se verifica la condición estándar de separación para el sistema Ψ , i.e. la condición de abierto que se definió en (1.15). El resultado central del capítulo, que hemos llamado Θ -lema, afirma que la $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida del conjunto Θ es nula para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$.

La respuesta a algunas conjeturas planteadas en la literatura, así como la extensión de algunos resultados, están vinculados esencialmente al hecho de que el conjunto Θ no ‘acumule medida’. El Θ -lema además será necesario repetidamente en los capítulos que siguen. En una primera sección se recogen algunas de las motivaciones y conjeturas referentes al tamaño del conjunto Θ . La segunda sección está dedicada a la demostración del resultado central del capítulo. Una última sección recoge las implicaciones y consecuencias que se siguen del Θ -lema.

2.1 Preliminares.

Se define el conjunto de solapamiento del sistema $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$, que denominamos Θ , mediante

$$\Theta = \bigcup_{i \neq j} (\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E)). \quad (2.1)$$

El conjunto donde la proyección π deja de ser inyectiva está dado por

$$\Theta^* = \{x \in E : x = \pi(i) = \pi(j) \text{ con } i, j \in M^{\mathbb{N}}, i \neq j\}. \quad (2.2)$$

En ocasiones se llama *solapamiento primario* al conjunto Θ y *solapamiento sin más* al conjunto Θ^* . Suponer que $x \in \Theta^*$. Por lo tanto existen i y j tales que $x = \pi(i) = \pi(j)$, con $i_k = j_k$ para $1 \leq k \leq n$, e $i_{n+1} \neq j_{n+1}$. Si se considera $y = \pi(i_{n+1}i_{n+2}\dots) \in E$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_{i(n)}(y) &= \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n} \left(\bigcap_{k=n+1}^{\infty} \varphi_{i_{n+1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(E) \right) = \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(E) = x, \end{aligned}$$

puesto que φ_i es una inyección para cada i . Del mismo modo se tiene que $\varphi_{j(n)}(z) = x$ para $z = \pi(j_{n+1}, j_{n+2}, \dots) \in M^{\mathbb{N}}$, y por tanto, como $i_{n+1} \neq j_{n+1}$

$$z = y \in \varphi_{i_{n+1}}(E) \cap \varphi_{j_{n+1}}(E) \subset \Theta.$$

De esta manera, se ha probado que todo punto en el solapamiento Θ^* es imagen, mediante alguna composición finita de semejanzas de Ψ , de otro punto en el solapamiento primario Θ . En otras palabras,

$$\Theta^* = \bigcup_{i \in M^*} \varphi_i(\Theta), \quad (2.3)$$

donde $M^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M^k$ es el conjunto de sucesiones finitas de elementos en M . Puesto que el conjunto M^* es numerable, las propiedades de positividad de los conjuntos respecto a cualquier medida son las mismas, es decir, ambos son de medida nula o positiva simultáneamente. En particular, tienen la misma dimensión (Hausdorff o packing), puesto que éstas son σ -estables (ver por ejemplo [Rey 92]).

Cuando se tiene condición de abierto, el modo en que se produce el solapamiento está ‘controlado’ en cierto sentido. Sea $V \subset \mathbb{R}^N$ un abierto verificando la condición de abierto para el sistema Ψ . Entonces, para $i \neq j$, $\varphi_i(V) \cap \varphi_j(V) = \emptyset$ (ver (1.16)). Esto implica que

$$\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E) \subset \varphi_i(F) \cap \varphi_j(F) \subset \varphi_i(\partial V) \cap \varphi_j(\partial V)$$

(recordar que $F = \overline{V}$), y por lo tanto el conjunto de solapamiento primario verifica la propiedad

$$\Theta \subset \bigcup_{i \neq j} (\varphi_i(\partial V) \cap \varphi_j(\partial V)).$$

Observar que esto proporciona cierta información sobre Θ , que de hecho será útil en la prueba del teorema 2.2.2. Sin embargo, la frontera de V , que es la responsable de la estructura de Θ puede ser un conjunto muy irregular, e incluso de dimensión alta. Lejos de los casos clásicos (tapiz de Sierpinski, curva de Koch, etc.) en los que el conjunto Θ^* es numerable, y por tanto trivial en medida, es importante por tanto observar que el solapamiento puede ser un conjunto muy ‘grande’ en términos geométricos cuando se verifica la condición de abierto. Por ejemplo, si se toma $E = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, el cubo unidad de \mathbb{R}^2 , como el autosemejante generado por el sistema de cuatro semejanzas

$$\Psi = \{\varphi_{a_i, a_j}(x, y) = 1/2((x, y) + (a_i, a_j)) : a_i, a_j \in \{0, 1\}^2\}, \quad (2.4)$$

se tiene que $\Theta = (\{1/2\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1/2\})$, y por tanto $\dim \Theta = 1$, que está lejos de ser trivial en modo alguno.

Hay al menos tres puntos de vista bajo los que se puede considerar el conjunto E en relación al espacio abstracto $M^{\mathbb{N}}$: topológico, probabilista, y dinámico. A continuación se comentan los tres brevemente, y se muestra el papel relevante que en esa relación juega el conjunto Θ .

- I) Desde el punto de vista de la *topología*, puesto que la aplicación π es continua con respecto a la topología dada en $M^{\mathbb{N}}$ (ver e.g. [Bar 88]), el conjunto E es homeomorfo a un conjunto de Cantor si $\Theta^* = \emptyset$ (de (2.3) se tiene que π es una biyección si y sólo si $\Theta^* = \emptyset$). Más aún, se puede definir una métrica en $M^{\mathbb{N}}$ que induce la topología producto, de manera que el conjunto E (con

la métrica euclídea) es métricamente equivalente al espacio de Cantor de m códigos. Cuando $\Theta \neq \emptyset$, la aplicación π no es inyectiva, y por tanto E no puede ser topológicamente un conjunto de Cantor.

- II) El punto de vista *probabilista* o de teoría de la medida considera de modo natural la medida producto $\nu_{\mathbf{p}}$ en $M^{\mathbb{N}}$, definida en (1.20), generada por un vector de probabilidad $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Se considera la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}} = \nu_{\mathbf{p}} \circ \pi^{-1}$ en E con la σ -álgebra \mathcal{C}_{π} inducida por la σ -álgebra de los cilindros en $M^{\mathbb{N}}$, esto es

$$A \in \mathcal{C}_{\pi} \text{ si } \pi^{-1}(A) \in \mathcal{C}. \quad (2.5)$$

La equivalencia natural entre espacios de medida es el *isomorfismo de espacios de medida*. Se dice que los espacios de medida $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu_{\mathbf{p}})$ y $(E, \mathcal{C}_{\pi}, \mu_{\mathbf{p}})$ son isomorfos si existen conjuntos medibles

$$\tilde{M} \subset M^{\mathbb{N}} \text{ y } \tilde{E} \subset E \quad (2.6)$$

tales que $\nu_{\mathbf{p}}(\tilde{M}) = 1 = \mu_{\mathbf{p}}(\tilde{E})$, y una aplicación invertible

$$f: \tilde{M} \rightarrow \tilde{E} \quad (2.7)$$

que preserva la medida, i.e. $\nu_{\mathbf{p}}(f^{-1}(A)) = \mu_{\mathbf{p}}(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}_{\pi} \cap \tilde{E}$ (esta es la σ -álgebra restringida). De este modo, E y $M^{\mathbb{N}}$ son isomorfos si, después de haber eliminado conjuntos de medida nula, se transforman uno en otro biyectivamente mediante una transformación que preserva la medida. Es claro que si $\Theta^* = \emptyset$, los espacios E y $M^{\mathbb{N}}$ (se entienden con las estructuras de espacio de medida) son trivialmente isomorfos, tomando simplemente $\pi = f$, $\tilde{E} = E$, $\tilde{M} = M$ arriba. En tal caso se puede escribir

$$(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu_{\mathbf{p}}) \stackrel{\pi}{\simeq} (E, \mathcal{C}_{\pi}, \mu_{\mathbf{p}}), \quad (2.8)$$

indicando que el isomorfismo está proporcionado por π . Recordar la definición del vector $\mathbf{p}_s \in \mathcal{P}^+$ dada en (1.22). En este caso se tiene $\mu_s(\Theta) = 0$ [Hut 81] cuando hay condición de abierto, y por lo tanto π es una biyección sobre los conjuntos de medida plena $M^{\mathbb{N}} \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$ y $E \setminus \Theta^*$. En tal caso el isomorfismo (2.8) también se verifica. El siguiente problema se plantea por tanto de modo natural.

Problema 1: Decidir si el isomorfismo (2.8) es cierto cuando $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$ y Ψ verifica la condición de abierto.

Si se consideran en $M^{\mathbb{N}}$ dos medidas ν_p, ν_q diferentes ($p \neq q, p, q \in \mathcal{P}^+$), la ley fuerte de los grandes números muestra que existe un conjunto P tal que $\nu_p(M^{\mathbb{N}} \setminus P) = 0$ mientras que $\nu_q(P) = 0$. Es decir, ν_p y ν_q son *mutuamente singulares*. Trivialmente se tiene que las medidas μ_p y μ_q son también mutuamente singulares cuando $\Theta = \emptyset$. C. Bandt [Ban 91] planteó la pregunta correspondiente cuando $\Theta \neq \emptyset$ en términos de “si los conjuntos $\pi^{-1}(E_i \cap E_j)$ tienen medida cero con respecto a todas las medidas producto” entonces dos medidas autosemejantes diferentes (asociadas a vectores en \mathcal{P}^+) serán mutuamente singulares.

Problema 2: (C. Bandt) Decidir si dos medidas autosemejantes asociadas a diferentes vectores en \mathcal{P}^+ son mutuamente singulares cuando $\Theta \neq \emptyset$ pero se tiene condición de abierto.

- **III)** Consideramos E desde un tercer ángulo, el de la *dinámica* que tiene lugar en él bajo la acción de la aplicación *shift*. Este punto de vista ha recibido gran atención en la literatura reciente de la dinámica no-lineal, en la que la aplicación diente-de-sierra en el intervalo ha proporcionado un ejemplo teórico paradigmático de sistema caótico, ver e.g. [MMR 95]. Nuestro trabajo generaliza algunas propiedades ergódicas de la dinámica diente-de-sierra en el intervalo al contexto de conjuntos autosemejantes.

Sea $\tau : M^{\mathbb{N}} \mapsto M^{\mathbb{N}}$ la transformación *shift* en el espacio de códigos, i.e.

$$\tau(i_1, i_2, i_3, \dots) = (i_2, i_3, \dots), \quad (2.9)$$

y considerar el sistema dinámico $(M^{\mathbb{N}}, \tau)$. Si $\Theta = \emptyset$ se puede definir la aplicación *shift* en el espacio E mediante conjugación, esto es

$$T = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}. \quad (2.10)$$

Observar que T transforma $E \mapsto E$ mediante

$$T(x) = \varphi_{i_1}^{-1}(x),$$

si $x = \pi(i_1, i_2, \dots)$. Más aún, cuando $\Theta = \emptyset$ la aplicación π proporciona una conjugación topológica entre los sistemas dinámicos $(M^{\mathbb{N}}, \tau)$ y (E, T) . Cuando $\Theta \neq \emptyset$, π nunca es un homeomorfismo y por tanto los sistemas $(M^{\mathbb{N}}, \tau)$ y (E, T) no pueden ser topológicamente conjugados. Es más, ni siquiera la

transformación T está bien definida mediante conjugación con τ . Sin embargo, desde un punto de vista de teoría de la medida el sistema dinámico $(E, T, \mu_{\mathbf{p}})$ aún puede ser dinámicamente equivalente al sistema $(M^{\mathbf{N}}, \tau, \nu_{\mathbf{p}})$. El marco para tal equivalencia es la teoría ergódica. Introducimos a continuación las ideas necesarias para dicha equivalencia que pueden consultarse en [Wal 82]. Para ello suponer de momento que $\Theta = \emptyset$. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y $\nu_{\mathbf{p}}$ la medida producto asociada en $M^{\mathbf{N}}$. Entonces la aplicación shift τ preserva en general la medida $\nu_{\mathbf{p}}$, es decir

$$\nu_{\mathbf{p}}(\tau^{-1}(A)) = \nu_{\mathbf{p}}(A) \quad (2.11)$$

para todo $A \in \mathcal{C}$. Ello es suficiente para demostrar que T también preserva la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ en E , i.e. usando (2.11) y que π es una biyección se tiene para $A \in \mathcal{C}_{\pi}$

$$\mu_{\mathbf{p}}(T^{-1}(A)) = \mu_{\mathbf{p}}(\pi \circ \tau^{-1} \circ \pi^{-1}(A)) = \quad (2.12)$$

$$\nu_{\mathbf{p}}(\tau^{-1} \circ \pi^{-1}(A)) = \nu_{\mathbf{p}}(\pi^{-1}(A)) = \mu_{\mathbf{p}}(A),$$

y por tanto T preserva $\mu_{\mathbf{p}}$. En ese contexto, se dice que la aplicación T y la aplicación τ son *isomorfas* (como aplicaciones que preservan la medida en los espacios donde están definidas) si existen conjuntos medibles $\tilde{M} \subset M^{\mathbf{N}}$ y $\tilde{E} \subset E$ tales que

$$\nu_{\mathbf{p}}(\tilde{M}) = 1 = \mu_{\mathbf{p}}(\tilde{E}), \text{ y } \tau(\tilde{M}) \subset \tilde{M}, T(\tilde{E}) \subset \tilde{E}, \quad (2.13)$$

y una aplicación $f : \tilde{M} \mapsto \tilde{E}$ que preserva la medida, y tal que

$$f \circ \tau(\mathbf{i}) = T \circ f(\mathbf{i}) \quad (2.14)$$

para todo $\mathbf{i} \in \tilde{M}$. Los sistemas dinámicos $(M^{\mathbf{N}}, \tau, \nu_{\mathbf{p}})$ y (E, T, μ) son por tanto trivialmente isomorfos cuando $\Theta = \emptyset$. Basta tomar $f = \pi$ en (2.14). Observar que *a priori* no puede concluirse lo mismo cuando $\Theta \neq \emptyset$. En este caso ni siquiera puede concluirse que la medida μ es invariante para la transformación T . Esto se debe a que en general en este caso se tiene que $\pi^{-1}(\pi(A)) \supseteq A$, y por tanto la segunda igualdad en (2.12) es ahora una desigualdad (\geq). El siguiente problema se plantea entonces de manera natural.

Problema 3: Suponer que $\Theta \neq \emptyset$, pero el sistema Ψ verifica condición de abierto. Dado $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ decidir si se puede definir una aplicación T en E que

preserve la medida $\mu_{\mathbf{p}}$, de modo que los sistemas $(E, T, \mu_{\mathbf{p}})$ y $(M^{\mathbb{N}}, \tau, \nu_{\mathbf{p}})$ sean isomorfos.

Puesto que dos medidas de probabilidad distintas, invariantes y ergódicas para una transformación en un espacio de probabilidad son mutuamente singulares [Wal 82], si se demuestra que una aplicación T definida en E preserva las medidas $\mu \in \mathcal{M}^+$, y es ergódica respecto a cualquiera de ellas, se demuestra de paso la singularidad de las medidas autosemejantes.

En realidad los tres problemas formulados se resuelven a la vez si se demuestra que el solapamiento Θ es un conjunto de μ -medida nula cuando se tiene condición de abierto. Este es el contenido del teorema 2.2.2, que se demuestra en la siguiente sección.

2.2 Demostración del Θ -lema.

Puesto que se necesitará el resultado tanto para el caso de M finito como numerable, es necesario demostrar previamente el siguiente lema, que demuestra que el reciente resultado de A. Schief [Sch 94] puede extenderse al caso numerable.

Lema 2.2.1 *Suponer que $\Psi \in \mathcal{S}(N, \mathbb{N})$ verifica la condición de abierto con abierto V , entonces Ψ verifica la condición fuerte de abierto, i.e. $V \cap E \neq \emptyset$.*

demostración:

Sea \mathbb{I} cualquier subconjunto finito de \mathbb{N} , y considerar el sistema $\Psi_{\mathbb{I}} = \{\varphi_i : i \in \mathbb{I}\}$. Sea $E_{\mathbb{I}}$ el conjunto autosemejante asociado al sistema $\Psi_{\mathbb{I}}$. Claramente el abierto V verifica la condición de abierto para el sistema $\Psi_{\mathbb{I}}$, y del resultado de Schief [Sch 94] se tiene que $V \cap E_{\mathbb{I}} \neq \emptyset$. Puesto que $E_{\mathbb{I}} \subset E$ se tiene que $E \cap V \neq \emptyset$ y por tanto la condición fuerte de abierto se tiene para el autosemejante E . \square

Teorema 2.2.2 (Θ -Lemma)

Sea M finito o numerable, y sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verificando condición de abierto. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y sea $\mu_{\mathbf{p}}$ la medida autosemejante asociada a \mathbf{p} y al sistema Ψ . Entonces

$$\mu_{\mathbf{p}}(\Theta) = 0.$$

demostración:

Del lema 2.2.1, se tiene que la condición fuerte de abierto se verifica tanto si M es finito o numerable. Puede entonces suponerse que

$$E \cap V \neq \emptyset. \quad (2.15)$$

Dado $x \in E$ y un código i tal que $\pi(i) = x$ definimos la i -órbita shift de x como el conjunto

$$\gamma_i(x) = \{x, x_1, x_2, \dots\},$$

donde para cada $m \geq 1$

$$x_m = \varphi_{i_m}^{-1} \circ \varphi_{i_{m-1}}^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}^{-1}(x). \quad (2.16)$$

Definimos la órbita shift de x como

$$O(x) := \bigcup_{i \in \pi^{-1}(x)} \gamma_i(x). \quad (2.17)$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Para una secuencia finita $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_k) \in M^k$, y para cada código $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$, sea $\delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i})$ el límite

$$\delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card}\{q : i_q = j_1, i_{q+1} = j_2, \dots, i_{q+k-1} = j_k, 1 \leq q \leq n - k\}. \quad (2.18)$$

Consideramos el subconjunto del espacio de códigos $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{\infty}$ (cuya proyección en E se llamará en el capítulo 5 el conjunto 'fino' de Besicovitch) definido por

$$\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{\infty} = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = p_{\mathbf{j}}, \text{ para todo } \mathbf{j} \in M^k\}. \quad (2.19)$$

Recordar que $p_{\mathbf{j}}$ es la $\nu_{\mathbf{p}}$ -medida del cilindro (\mathbf{j}) , i.e. $p_{\mathbf{j}} = \nu_{\mathbf{p}}(\mathbf{j}) = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_k}$, para $\mathbf{j} \in M^k$.

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ cualquiera . Necesitaremos dos hechos.

(i) En primer lugar, $O(\pi(\mathbf{i}))$ es densa en E para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{\infty}$.

A continuación probamos la afirmación (i). Sea $y \in E$ y $\varepsilon > 0$. Suponer que $y = \pi(\mathbf{j})$ para un $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots) \in M^{\mathbb{N}}$. Sea $k_0 = \min\{k : r_{\mathbf{j}(k)} < \varepsilon\}$. Tomar $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, puesto que $\delta_{\mathbf{l}}(\mathbf{i}) = p_{\mathbf{l}} > 0$ para todo $\mathbf{l} \in M^*$, en particular se tiene que

$$\delta_{\mathbf{j}(k_0)}(\mathbf{i}) = p_{\mathbf{j}(k_0)} > 0. \quad (2.20)$$

Como la frecuencia asintótica (2.20) es positiva, en particular la secuencia finita $\mathbf{j}(k_0)$ ha de aparecer infinitas veces en la sucesión infinita \mathbf{i} (pues en caso contrario $\delta_{\mathbf{j}(k_0)}(\mathbf{i}) = 0$, contradiciendo el hecho de que $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$). Por lo tanto existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^p(\mathbf{i}) = (i_p, i_{p+1}, \dots)$ verifica

$$i_p = j_1, i_{p+1} = j_2, \dots, i_{p+k_0-1} = j_{k_0},$$

y por tanto los códigos $\tau^p(\mathbf{i})$ y \mathbf{j} están contenidos en el cilindro $(\mathbf{j}(k_0))$. De esto se sigue que los puntos $\pi(\tau^p(\mathbf{i}))$ e y están contenidos en el cilindro geométrico $E_{\mathbf{j}(k_0)}$, es decir $d(\pi(\tau^p(\mathbf{i})), y) \leq r_{\mathbf{j}(k_0)} < \varepsilon$, y por tanto se tiene (i), puesto que $\pi(\tau^p(\mathbf{i})) \in \gamma_{\mathbf{i}}(x)$.

(ii) $O(x) \subset \partial V$ para todo $x \in \partial V \cap E$.

Para probar (ii), suponer lo contrario, i.e. $x_m \in \gamma_{\mathbf{i}}(x) \cap V$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y para algún $\mathbf{i} \in \pi^{-1}(x)$. Entonces $x_{m-1} = \varphi_{i_m}(x_m) \in \gamma_{\mathbf{i}}(x) \cap V$, puesto que φ_i envía interior en interior (es una aplicación afín). Recursivamente se tiene entonces que $x_j \in \gamma_{\mathbf{i}}(x) \cap V$ para $j = m-2, m-3, \dots$, y por tanto $x \in V$. Esto supone una contradicción con la elección de x en (ii).

Suponer ahora que existe

$$x \in \pi(\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{\infty}) \cap \Theta. \quad (2.21)$$

Puesto que $x \in \Theta$, se tiene que $x = \pi(\mathbf{i}) = \pi(\mathbf{j})$ para $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in M^{\mathbb{N}}$ de modo que

$$x \in \varphi_{i_1}(E) \cap \varphi_{j_1}(E) \subset \varphi_{i_1}(F) \cap \varphi_{j_1}(F), \quad (2.22)$$

con $i_1 \neq j_1$ (recordar que $F = \bar{V}$). Puesto que la condición de abierto implica que $\varphi_{i_1}(V) \cap \varphi_{j_1}(V) = \emptyset$, se sigue de (2.22) que

$$x \in \varphi_{i_1}(\partial V) \cap \varphi_{j_1}(\partial V). \quad (2.23)$$

Entonces, si $\gamma_i(x) = \{x, x_1, x_2, \dots\}$ es la i -órbita shift de x , (2.23) implica que $x_1 \in \partial V \cap E$; y de (ii) arriba se sigue que

$$\gamma_{i_2 i_3 \dots}(x_1) \in \partial V. \quad (2.24)$$

Por otra parte, como $(i_2, i_3, \dots) \in \mathcal{B}_p^{(\infty)}$, (i) implica que $\gamma_{i_2 i_3 \dots}(x_1)$ es densa en E . Pero entonces de (2.24) se tiene que también ∂V es denso en E . Esto contradice la condición fuerte de abierto (2.15), puesto que E no podría tener un punto en V . Por lo tanto (2.21) es falso y se tiene en cambio que

$$\pi(\mathcal{B}_p^{(\infty)}) \cap \Theta = \emptyset. \quad (2.25)$$

Para cada $\mathbf{j} \in M^*$, sea $1_{\mathbf{j}}$ la función $M^{\mathbb{N}} \mapsto \{0, 1\}$ indicadora del cilindro (\mathbf{j}) , i.e.

$$1_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{i} \in (\mathbf{j}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El teorema ergódico de Birkhoff [Wal 82] afirma que

$$\nu_p(\{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k 1_{\mathbf{j}}(\tau^j(\mathbf{i})) = p_{\mathbf{j}}\}) = 1, \quad (2.26)$$

donde ν_p es la medida producto en $M^{\mathbb{N}}$ asociada a p (recordar que $p_{\mathbf{j}} = \nu_p((\mathbf{j}))$). Observar que, para cada $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$

$$\delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k 1_{\mathbf{j}}(\tau^j(\mathbf{i})),$$

y por tanto (2.26) implica que, para cada $\mathbf{j} \in M^*$

$$\nu_p(\mathcal{B}_p^{(\mathbf{j})}) = 1, \quad (2.27)$$

donde

$$\mathcal{B}_p^{(\mathbf{j})} = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = p_{\mathbf{j}}\}. \quad (2.28)$$

Puesto que $\mathcal{B}_p^{(\infty)}$ se escribe como

$$\mathcal{B}_p^{(\infty)} = \bigcap_{\mathbf{j} \in M^*} \mathcal{B}_p^{(\mathbf{j})},$$

con la intersección numerable, se sigue de (2.27) que $\nu_p(\mathcal{B}_p^{(\infty)}) = 1$. Como consecuencia se tiene

$$\mu_p(\pi(\mathcal{B}_p^{(\infty)})) \geq \nu_p(\mathcal{B}_p^{(\infty)}) = 1, \quad (2.29)$$

donde μ_p la medida autosemejante inducida por ν_p . Finalmente, de (2.25) y (2.29) se tiene el resultado. \square

Nota 2.2.3 Puesto que el conjunto Θ^* es unión numerable de copias semejantes a Θ (ver (2.3)), se tiene también que $\mu_p(\Theta^*) = 0$. Más aún, puesto que lo que se prueba en la demostración del Θ -lema es la afirmación más fuerte (2.25), se tiene también que

$$\Theta^* \cap \pi(\mathcal{B}_p^{(\infty)}) = \emptyset. \quad (2.30)$$

pues, de (2.3), si $\pi(i) \in \Theta^*$ entonces $\pi(\tau^p(i)) \in \Theta$ para algún p finito, y el razonamiento del teorema se aplica a $\tau^p(i)$, i.e. si $x \in \Theta^*$ la órbita shift de x 'entra' en un número finito de iteraciones en el conjunto ∂V y después se confina en este conjunto. Observar que claramente

$$S\Psi(\Theta^*) \subset \Theta^*. \quad (2.31)$$

En el otro sentido, si $x = \pi(i) \in \Theta^*$, se tiene que $\pi(\tau(i)) \in \Theta^*$ si $x \in \Theta^* \setminus \Theta$, y que $\pi(\tau(i)) \in \partial V \cap E$ si $x \in \Theta$. Entonces existe $y = \pi(\tau(i)) \in \Theta^* \cup (\partial V \cap E)$ tal que $\varphi_i(y) = x$ para algún $i \in M$ (observar que $\pi(\tau(i)) \in S\Psi^{-1}(\pi(i))$). De (2.31) y de (i) en la demostración del Θ -lema se sigue entonces que

$$((\partial V \cap E) \cup \Theta^*) = S\Psi((\partial V \cap E) \cup \Theta^*). \quad (2.32)$$

Por tanto todo punto x que tiene una órbita shift que interseca al conjunto Θ^* , tiene la órbita completa de hecho contenida en $\Theta^* \cup (\partial V \cap E)$, y finalmente confinada en $\partial V \cap E$ (que entonces no puede ser densa en E sin violar la condición fuerte de abierto).

Observar que la demostración del Θ -lema proporciona un conjunto mucho más amplio que el conjunto $\mathcal{B}_p^{(\infty)}$ que tiene intersección vacía con el solapamiento Θ^* . De hecho, lo que se demuestra en el Θ -lema es que ningún punto x con una órbita shift $O(x)$ densa en E puede estar contenido en el conjunto Θ^* . Este hecho puede formularse como sigue en términos la estructura frecuencial de los puntos del conjunto de solapamiento.

Lema 2.2.4 *Sea el conjunto Ξ dado por*

$$\Xi = \{i : \delta_j(i) = 0 \text{ para algún } j \in M^*\}.$$

Bajo condición de abierto se tiene

$$\Theta^* \cup (\partial V \cap E) \subseteq \pi(\Xi), \quad (2.33)$$

y además $\mu_p(\pi(\Xi)) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}^+$.

demostración:

Suponer que $\delta_j(i) > 0$ para todo $j \in M^*$. Entonces $O(\pi(i))$ es densa en E . Pero de la demostración del Θ -lema se tiene que $O(\pi(i)) \cap (\Theta^* \cup (\partial V \cap E)) = \emptyset$. Por tanto $\pi(i)$ no puede estar en el conjunto $\Theta^* \cup (\partial V \cap E)$ y se sigue el contenido (2.33). Para cada $p \in \mathcal{P}^+$ considerar el conjunto $\mathcal{B}_p^{(\infty)}$ definido en (2.19). Observar que se tiene $\Xi \cap \mathcal{B}_p^{(\infty)} = \emptyset$, y por tanto $\mu_p(\pi(\Xi)) = 0$ de (2.29). \square

El hecho de que toda ν_p -medida del conjunto Ξ sea nula puede hacer pensar que dicho conjunto es ‘pequeño’. En el capítulo 5 se demuestra que esto está lejos de ser cierto; desde un punto de vista ‘dimensional’ es un conjunto tan grande como todo el espacio $M^{\mathbb{N}}$. En la sección 5.3 se define un concepto de dimensión, introducido por Billingsley en 1960, y que permite ‘calibrar’ el tamaño de los sucesos de probabilidad nula. Se demuestra allí que la dimensión del conjunto Ξ es plena.

2.3 Implicaciones del Θ -lema.

El Θ -lema da respuesta directa a las cuestiones planteadas en la sección 2.1 sobre la estructura de medida y ergódica del espacio E , con la medida μ_p , y la aplicación shift T . En esta sección recogemos estos resultados. Además, otros resultados relevantes en los que el Θ -lema juega un papel importante también se presentan aquí.

2.3.1 Estructura de los espacios de medida (E, μ_p) .

Recogemos en el teorema siguiente la respuesta al problema 1 de la sección 2.1.

Teorema 2.3.1 *Sea M finito o numerable. Sea $p \in \mathcal{P}^+$, y sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verificando la condición de abierto. Entonces los espacios de medida $(M^N, \mathcal{C}, \nu_p)$ y $(E, \mathcal{C}_\pi, \mu_p)$ son isomorfos.*

demostración:

Basta tomar $\tilde{E} = E \setminus \Theta^*$, y $\tilde{M} = \pi^{-1}(E \setminus \Theta^*) = M^N \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$ como los conjuntos en (2.6), y la proyección π como aplicación f en (2.7). Puesto que π es continua y Θ^* es un conjunto F_σ , el conjunto $\pi^{-1}(\Theta^*)$ es de Borel, y por tanto \tilde{M} es \mathcal{C} -medible (la σ -álgebra \mathcal{C} contiene a los conjuntos de Borel). Por tanto, de la definición (2.5) \tilde{E} es \mathcal{C}_π -medible. El Θ -lema implica que $\mu_p(\tilde{E}) = \nu_p(\tilde{M}) = 1$, y por definición $\pi|_{\tilde{M}}$ es una biyección sobre \tilde{E} . Por tanto el resultado se sigue de (2.6)-(2.7) en el punto II) de la sección 2.1. \square

Nota 2.3.2 Si se considera el conjunto $B_p^{(\infty)} = \pi(\mathcal{B}_p^{(\infty)})$, se tiene que $\pi|_{\mathcal{B}_p^{(\infty)}}$ es también una biyección sobre un conjunto de ν_p -medida uno. Los conjuntos $\mathcal{B}_p^{(\infty)}$ y $B_p^{(\infty)}$ también podían haber jugado los papeles de \tilde{M} y \tilde{E} respectivamente en la demostración del teorema 2.3.1. Esto permite considerar un único código $i_x = \pi^{-1}(x) \in \mathcal{B}_p^{(\infty)}$ para cada $x \in B_p^{(\infty)}$. Este hecho será utilizado frecuentemente en lo que sigue. Se preferirá el conjunto $\mathcal{B}_p^{(\infty)}$ al conjunto \tilde{M} de la demostración anterior porque tiene propiedades buenas respecto a las densidades logarítmicas, como se verá en los siguientes capítulos.

La respuesta al problema sugerido por C. Bandt (ver II) en la sección anterior) está dada en el siguiente

Teorema 2.3.3 *Sean $p, q \in \mathcal{P}^+$, con $p \neq q$. Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$, con M finito o numerable, verificando la condición de abierto. Entonces las medidas autosemejantes μ_p y μ_q son mutuamente singulares.*

demostración:

De la demostración del Θ -lema existen dos conjuntos disjuntos (que además no intersecan al solapamiento), $\pi(\mathcal{B}_p^{(\infty)})$ y $\pi(\mathcal{B}_q^{(\infty)})$, que concentran las medidas μ_p y μ_q respectivamente. Por tanto ambas medidas son mutuamente singulares. \square

2.3.2 Estructura de los sistemas dinámicos (E, T, μ_p) . Una interpretación de la fórmula de dimensión de las medidas autosemejantes en términos de teoría ergódica de sistemas dinámicos.

Esta sección considera la estructura y algunas propiedades de la dinámica del shift en el conjunto E . En primer lugar, observar que el Θ -lema permite definir una aplicación shift en E que conjuga con el shift de Bernoulli τ de $M^{\mathbb{N}}$ en un conjunto de μ_p -medida plena, para $p \in \mathcal{P}^+$ arbitrario. Definir una aplicación $T : E \mapsto E$ mediante

$$T|_{E \setminus \Theta^*} = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}, \quad (2.34)$$

y con

$$T(x) = \varphi_l^{-1}(x), \text{ con } l \in \Pi_1(x) = \{i_1 : i = (i_1 i_2 \dots) \in \pi^{-1}(x)\}. \quad (2.35)$$

para $x \in \Theta^*$, donde l se especifica mediante alguna regla entre el conjunto de dígitos $\Pi_1(x)$. Alternativamente se puede definir una dinámica aleatoria en el conjunto Θ^* , como lo hace Barnsley [Bar 88], especificando $l \in \Pi_1(x)$ mediante alguna regla probabilista en cada iteración). Desde el punto de vista de la medida es irrelevante cómo se defina T en Θ^* . Llamaremos a cualquier aplicación $T : E \mapsto E$ que verifique (2.34) una *transformación shift* en E . El siguiente teorema recoge la estructura del sistema dinámico en E conducido por una aplicación T .

Teorema 2.3.4 *Sea M finito. Sea E el conjunto autosemejante asociado a $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verificando condición de abierto. Sea $p \in \mathcal{P}^+$, y sea el sistema dinámico (E, T, μ_p) , donde $T : E \mapsto E$ es un shift en E , i.e. verifica (2.34), y μ_p es la medida autosemejante inducida por p en E . Entonces T preserva la medida μ_p , y*

las aplicaciones T y τ son isomorfas. En particular T es ergódica para la medida $\mu_{\mathbf{p}}$.

demostración:

Observar en primer lugar que el razonamiento en (2.12) no se puede aplicar en principio cuando el solapamiento es no vacío por que en general $\pi^{-1}(\pi(A)) \supseteq A$, y la tercera igualdad en (2.12) es *a priori* una desigualdad (\geq). Sin embargo el Θ -lema implica que

$$\mu_{\mathbf{p}}(\pi(B)) = \mu_{\mathbf{p}}(\pi(B) \setminus \Theta^*) = \nu_{\mathbf{p}}(B \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)) = \nu_{\mathbf{p}}(B).$$

Si se pone $B = \tau^{-1} \circ \pi^{-1}(A)$ en (2.12), de lo anterior se sigue que la segunda igualdad en (2.12) se mantiene, y la $\nu_{\mathbf{p}}$ -invariancia de τ y la definición de $\mu_{\mathbf{p}}$ demuestran, como allí, que el shift T preserva la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ bajo condición de abierto.

Basta tomar ahora $\tilde{M} = \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ y $\tilde{E} = \pi(\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)})$ en (2.13) y π en (2.14). El conjunto \tilde{M} es \mathcal{C} -medible. Para ver esto escribir $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ como

$$\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)} = \bigcap_{j \in M^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq N} \{i : i \in M^{\mathbb{N}}, p_j - n^{-1} < \delta_j(i, k) < p_j + n^{-1}\},$$

que es un conjunto $F_{\sigma\delta\sigma}$, pues el conjunto entre llaves es una unión finita de cilindros y por tanto un cerrado. Entonces \tilde{M} es un conjunto de Borel, y por tanto \mathcal{C} -medible. El conjunto \tilde{E} es también \mathcal{C}_{π} -medible, pues su antemagen por π es unión de $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, que es \mathcal{C} -medible, y un conjunto de $\nu_{\mathbf{p}}$ -medida nula, y por tanto también medible. En la demostración del Θ -lema se muestra que los conjuntos \tilde{M} y \tilde{E} son invariantes (mediante τ y T respectivamente), y que tienen medida plena. Las aplicaciones τ y T conjugan mediante π por definición, y por tanto se tiene el isomorfismo que afirma el teorema.

Es bien sabido que el shift de Bernouilli τ definido en el espacio de m símbolos es ergódico (ver [Wal 82]). Como la ergodicidad es una propiedad invariante bajo isomorfismo de transformaciones que preservan la medida [Wal 82] se tiene de arriba que la transformación T es ergódica para la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. \square

Como se dijo en el capítulo 1, el grado de singularidad de una medida se calibra con la dimensión. En [DGS 92] se demostró que la dimensión de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$

está dada por

$$\dim \mu_{\mathbf{p}} = \frac{\sum_{i \in M} p_i \log p_i}{\sum_{i \in M} p_i \log r_i}, \quad (2.36)$$

cuando se tiene condición de abierto.

A continuación se demuestra que la fórmula de dimensión (2.36) puede leerse en términos de conceptos naturales de la teoría ergódica de sistemas dinámicos, a saber, la entropía y los exponentes de Liapunov del par formado por la medida invariante $\mu_{\mathbf{p}}$ y la transformación T .

La entropía de Kolmogorov-Sinai $h(f, \eta)$ de una transformación f en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \eta)$ representa una medida de la estocasticidad presente en la evolución de una órbita 'típica' gobernada por la dinámica del sistema $x_{k+1} = f(x_k)$, $x(0) = x_0 \in \Omega$. La entropía $h(f, \eta)$ es un número real positivo que puede entenderse como la información máxima que se obtiene en promedio de una observación del estado del sistema en el régimen asintótico de la dinámica. La entropía es una cantidad global (que representa un promedio). Un valor positivo de $h(f, \eta)$ es característico de procesos dinámicos aleatorios (desordenados), mientras la entropía nula caracteriza a los sistemas deterministas clásicos (ordenados). Para los detalles sobre la definición y propiedades de la entropía en teoría ergódica puede consultarse el texto de Walters [Wal 82].

Si f es diferenciable, los exponentes de Liapunov del sistema dinámico dirigido por f en Ω (dotado de la medida invariante η), miden la tasas asintóticas típicas de divergencia/convergencia de las órbitas de estados en Ω inicialmente próximos. En un sistema dinámico ergódico N -dimensional hay N exponentes de Liapunov que desagregan la acción asintótica del flujo en direcciones de compresión (aquellas donde se obtiene tasas exponenciales de divergencia (exponentes) negativos) y de expansión (tasas o exponentes positivos). También son posibles exponentes nulos, en las direcciones en las que el flujo del sistema no comprime ni dilata el espacio. Los exponentes son magnitudes locales, están definidos para cada punto $x \in \Omega$. El teorema de Oseledec [Ose 68] afirma que los exponentes de Liapunov, que denotamos por $\{\lambda_i(x) : 1 \leq i \leq N\}$, para un sistema diferenciable y ergódico (Ω, f, η) existen en η -casi todo punto $x \in \Omega$, y son constantes, i.e $\lambda_i(x) = \lambda_i$ η -a.e. Los exponentes de Liapunov $\lambda_i = \lambda_i(f, \eta)$ dependen tanto de la aplicación f como de la medida η .

Un exponente máximo positivo significa que la dinámica del sistema es inestable, i.e. que el sistema exhibe *sensibilidad a condiciones iniciales*. La teoría y propiedades de exponentes de Liapunov puede verse en [Ose 68, ER 86].

El resultado que probaremos está inspirado en [You 82], y relaciona dos magnitudes importantes en teoría ergódica de sistemas dinámicos: la entropía, y los exponentes de la medida invariante, con una propiedad puramente geométrica de la dinámica, la dimensión de la medida. Sea T una transformación shift en E que permanecerá fija en la discusión, de modo que sólo se destacará la dependencia respecto a la medida de esas magnitudes ergódicas. La prueba del siguiente teorema hace uso del *teorema ergódico multiplicativo de Oseledec* [Ose 68]. La demostración de la versión que se usará es debida a Raghunathan, y puede verse en [Rag 78]. Una exposición comentada de este teorema y sus implicaciones puede consultarse en [MMR 95].

Teorema 2.3.5 *Sea M finito. Sea $\Psi \in S(N, M)$ verificando la condición de abierto. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y considerar un sistema dinámico $(E, T, \mu_{\mathbf{p}})$ como arriba. Entonces*

i) *La entropía de Kolmogorov-Sinai de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ está dada por*

$$h(\mu_{\mathbf{p}}) = - \sum_{i \in M} p_i \log p_i. \quad (2.37)$$

ii) *Los N exponentes de Liapunov de $\mu_{\mathbf{p}}$ coinciden, y están dados por*

$$\lambda_k(\mu_{\mathbf{p}}) = - \sum_{i \in M} p_i \log r_i, \text{ para } 1 \leq k \leq N \quad (2.38)$$

demostración:

i) Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. La entropía del shift de Bernouilli τ en el espacio de medida $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu_{\mathbf{p}})$ está dada por

$$h(\tau, \nu_{\mathbf{p}}) = - \sum_{i \in M} p_i \log p_i,$$

ver [Wal 82]. Es bien conocido que la entropía es un invariante mediante isomorfismos de transformaciones que preservan la medida [Wal 82]. Por lo tanto, del teorema 2.3.4 se tiene que la entropía del shift T en el espacio de probabilidad $(E, \mathcal{C}_\pi, \mu_p)$ también está dada por (2.37).

ii) Observar que de la definición (2.34) y del Θ -lema se tiene que T es diferenciable en μ_p -casi todo $x \in E$. De hecho se tiene

$$T(x) = \varphi_{i_1}^{-1}(x), \quad (2.39)$$

si $x = \pi(i_1, i_2, \dots) \in E \setminus \Theta^*$. Si $x \in \Theta^*$ la aplicación T también está definida mediante alguna regla $T(x) = \varphi_i^{-1}(x)$ como en (2.35). Sea $\mathbb{M}_{N \times N}$ el espacio de las matrices $N \times N$ con elementos en \mathbb{R} . Se considera la aplicación S de punto a matriz $E \mapsto \mathbb{M}_{N \times N}$ definida por $S(x) = D_x T$, donde $D_x T$ denota la matriz jacobiana de la transformación T en el punto x . Se define la transformación

$$S_x^{(n)} = S_{T^{n-1}(x)} T \circ S_{T^{n-2}(x)} T \circ \dots \circ S_x T. \quad (2.40)$$

Poner $E = (E \setminus \Theta^*) \cup (E \cap \Theta^*)$. Puesto que $T|_{E \setminus \Theta^*}$ es continua, es borel-medible. Entonces, los conjuntos de la forma $T^{-1}(U)$ con U abierto en el espacio $\mathbb{M}_{N \times N}$ (con la topología usual) son unión de un boreliano, que es \mathcal{C}_π -medible, y un subconjunto de $E \cap \Theta^*$ (que tiene μ_p -medida nula por el Θ -lema). Si se considera la medida autosemejante μ_p completa se tiene que la aplicación S es \mathcal{C}_π -medible. Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^{N^2} . La aplicación $x \mapsto \log \|S_x\|$ es acotada (M es finito) y es constante μ_p -a.e., de modo que

$$\int \log \|S_x\| d\mu_p(x) < +\infty.$$

En este contexto, la versión de Raghunathan del teorema ergódico multiplicativo de Oseledec afirma que el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_x^{(n)} \circ S_x^{(n)*} \right)^{1/2n} := \Lambda_x$$

existe para μ_p -casi todo punto $x \in E$ (aquí S^* denota la matriz transpuesta de S). Los logaritmos naturales de los autovalores de la matriz Λ_x son los *exponentes de Liapunov* del sistema gobernado por T en el punto x . Más aún, puesto que el teorema 2.3.4 garantiza que el par (E, T) es ergódico, el teorema de Oseledec afirma que los exponentes son constantes μ_p -a.e.

A continuación procedemos a calcular explícitamente la matriz límite Λ_x , y por tanto los N exponentes, para nuestro caso. Es sabido que una semejanza φ se obtiene únicamente componiendo una homotecia, una traslación, y una aplicación ortonormal. Se puede ver [Hut 81] para una demostración de este hecho. Por lo tanto, fijar una base ortonormal de \mathbb{R}^N , y considerar para cada $i \in M$ la descomposición mencionada de la semejanza φ_i^{-1} referida a esta base. En concreto φ_i^{-1} se puede escribir

$$\varphi_i^{-1} = r_i^{-1} O_i(x - \bar{x}_i) + \bar{x}_i, \tag{2.41}$$

donde r_i es la razón de contracción de φ_i , $O_i(\cdot)$ es una matriz ortonormal, y \bar{x}_i es el punto fijo de la semejanza φ_i^{-1} (que coincide con el de φ_i). Sea $x = \pi(i_1, i_2, \dots) \in E$. Derivando en (2.41), y teniendo en cuenta (2.39), se tiene en (2.40)

$$S_x^{(n)} = r_{i_1}^{-1} r_{i_2}^{-1} \dots r_{i_n}^{-1} O_{i_1} \circ O_{i_2} \circ \dots \circ O_{i_n},$$

de modo que

$$(S_x^{(n)} S_x^{(n)*})^{1/2} = \prod_{j=1}^n r_{i_j}^{-1} I_{N \times N}, \tag{2.42}$$

donde $I_{N \times N}$ es la matriz identidad $N \times N$. Sea R la variable aleatoria en M definida por $R(i) = -\log r_i$, y considerar en $M^{\mathbb{N}}$ el proceso independiente definido por $S_n^R(i) = \sum_{j=1}^n R \circ \text{pr}_1 \circ \tau^j(i)$, donde $\text{pr}_1 : M^{\mathbb{N}} \mapsto M$ es la proyección sobre la primera coordenada, y τ es el shift de Bernoulli en $M^{\mathbb{N}}$. Observar que la esperanza de R respecto de la probabilidad \mathbf{p} está dada por $\mathcal{E}[R] = -\sum_{i \in M} p_i \log r_i$. De (2.42), y de la ley fuerte de los grandes números se tiene que, para $\nu_{\mathbf{p}}$ -casi todo $i \in M^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \Lambda_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n r_{i_j}^{-1/n} I_{N \times N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log r_{i_j}\right) I_{N \times N} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} S_n^R(i)\right) I_{N \times N} = \exp(\mathcal{E}[R]) I_{N \times N}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

De este modo, la matriz Λ_x es constante $\mu_{\mathbf{p}}$ -a.e., diagonal, y con los elementos de la diagonal todos iguales a $\exp \mathcal{E}[R]$. Por lo tanto el espectro de Liapunov del sistema está compuesto de N exponentes de valor constante dado por

$$\lambda_j(x) = \mathcal{E}[R] = -\sum_{i \in M} p_i \log r_i$$

para todo $j = 1, \dots, N$, como afirma ii). \square

Nota 2.3.6 Observar que la demostración del teorema permite caracterizar un conjunto de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena para el que los exponentes de Liapunov están definidos y toman el valor de los exponentes del sistema. Para todo código \mathbf{i} en el conjunto de Besicovitch fino $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} \subset M^{\mathbf{N}}$ definido en (2.19), se tiene $\lambda_j(\pi(\mathbf{i})) = \mathcal{E}[R]$ para todo j . Ello se debe a que, cuando M es finito, se tiene de las propiedades frecuenciales asintóticas del código \mathbf{i}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} S_n^R(\mathbf{i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{i \in M} \delta_i(\mathbf{i}, n) \log r_i = - \sum_{i \in M} p_i \log r_i. \quad (2.44)$$

En realidad, este límite se comporta bien para todo código tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_i(\mathbf{i}, n) = p_i$, pero esto no es traducible en términos geométricos, ya que hay puntos en el conjunto de Besicovitch que están también en el conjunto de solapamiento Θ^* , donde $D_x T$ no está definida.

Nota 2.3.7 A continuación se da una justificación no rigurosa del modo en que los exponentes de Liapunov del sistema $(E, T, \mu_{\mathbf{p}})$ computados mediante el teorema 2.3.5 miden efectivamente tasas de divergencia de órbitas que corresponden a condiciones iniciales próximas. Para ello tomar $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$. Con esta elección se consigue por una parte que la aplicación T sea diferenciable a lo largo de la órbita de x , $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$; y por otro que el límite en (2.44) tome el valor adecuado $\mathcal{E}[R]$ para un conjunto de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena. Para un $y \in E \setminus \Theta^*$ suficientemente próximo a x se tiene

$$d(T^n(x), T^n(y)) \simeq \| D_x T^n \| d(x, y), \quad (2.45)$$

donde $\| \cdot \|$ es una norma, por ejemplo la norma del máximo, en el espacio $\mathbb{M}_{N \times N}$. Aplicando la regla de la cadena repetidamente se obtiene en (2.45)

$$d(T^n(x), T^n(y)) \simeq \| S_x^{(n)} \| d(x, y). \quad (2.46)$$

Es sabido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \| S_x^{(n)} \| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \| \Lambda_x \|$$

(ver e.g. [MMR 95]). Por lo tanto, tomando norma en (2.43) (que se verifica para todo $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$), la expresión (2.46) se puede escribir como

$$d(T^n(x), T^n(y)) \simeq e^{n\mathcal{E}[R]} d(x, y)$$

si n es suficientemente grande. Esta relación se tiene para un conjunto de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena, y por tanto expresa precisamente el hecho de que las órbitas que corresponden a estados iniciales x e y (próximos) se separan típicamente a una tasa exponencial dada por el exponente de Liapunov $\mathcal{E}[R] > 0$ (el exponente máximo, que en este caso coincide con todos los exponentes). La dinámica altamente inestable, consecuencia de la positividad de todos los exponentes de Liapunov, está confinada al compacto E . Esta combinación de inestabilidad y confinamiento de órbitas a un conjunto acotado es la marca de fábrica de los sistemas caóticos [ER 86].

Finalizamos esta sección con el siguiente corolario, que recoge la lectura de la fórmula de dimensión para la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ en los términos anteriormente referidos.

Corolario 2.3.8 *Sea $\Psi \in S(N, M)$ verificando condición de abierto. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Sea T una aplicación shift en E como arriba. Entonces, la dimensión de la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ verifica la fórmula*

$$\dim \mu_{\mathbf{p}} = \frac{h(\mu_{\mathbf{p}})}{\lambda(\mu_{\mathbf{p}})}, \quad (2.47)$$

donde $h(\mu_{\mathbf{p}})$ es la entropía de Kolmogorov-Sinai de $\mu_{\mathbf{p}}$, y $\lambda(\mu_{\mathbf{p}})$ es 'el exponente de Liapunov' de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$.

Nota 2.3.9 Se debería denominar a $\lambda(\mu_{\mathbf{p}}) := \lambda(\Psi, \mathbf{p})$ como 'el exponente del par (Ψ, \mathbf{p}) ' puesto que depende sólo de los parámetros $r_i, p_i, i \in M$ (y no de la transformación T particular). Sobre la interpretación de $\lambda(\Psi, \mathbf{p})$, éste parámetro debe entenderse, más que como el máximo exponente de Liapunov en el sistema, como un promedio de los N exponentes. En este caso todas las direcciones de los N autoespacios asociados a los autovalores de la matriz Λ_x son de máxima divergencia. Esta interpretación de $\lambda(\Psi, \mathbf{p})$ como promedio está en concordancia con otras fórmulas en la literatura, por ejemplo [You 82], que también relacionan magnitudes ergódicas, y en la que intervienen todos los exponentes reflejando las acciones de estirado y doblado del flujo.

Capítulo 3

Geometría de Medidas Autosemejantes I: Singularidad respecto a la Medida de Hausdorff.

Como se observó en el capítulo 1, en 1992 Deliu, Geronimo, Shonkwiler y Hardin encontraron la dimensión de una medida autosemejante dada $\mu_{\mathbf{p}}$. En concreto, en [DGS92] se prueba que, si M es finito y $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verifica la condición de abierto (1.15)-(1.16), se tiene que la dimensión de Hausdorff de la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ está dada por

$$\dim \mu_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}) := \frac{\sum_{i \in M} p_i \log p_i}{-\sum_{i \in M} p_i \log r_i}. \quad (3.1)$$

Como se razonó en la sección 1.3, el valor $s(\mathbf{p})$ clasifica la familia de medidas de Hausdorff H^t en los siguientes términos: la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a la medida H^t si $t > s(\mathbf{p})$, y es continua respecto a la medida H^t si $t < s(\mathbf{p})$. Sin embargo, esto no permite decidir cómo es la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ en su dimensión, i.e. si es continua o singular respecto de la medida $H^{s(\mathbf{p})}$. En este capítulo se resuelve este problema, clasificando el comportamiento de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ respecto a una familia paramétrica de medidas de Hausdorff que ‘refinan’ la dimensión $s(\mathbf{p})$.

La técnica empleada será local, mediante el uso de densidades de la medida

μ evaluadas sobre cilindros geométricos. Esto precisa demostrar previamente resultados de densidad especiales para conjuntos autosemejantes, así como extender resultados clásicos de C.A. Rogers y S.J. Taylor [RT 61].

3.1 Preliminares. Estimación de las medidas y dimensiones de Hausdorff y packing mediante técnicas locales.

El teorema central que se demostrará en esta sección está inspirado en los resultados clásicos de Rogers y Taylor [RT 61], que introdujeron en el año 1961 la densidad superior de una medida de Borel en \mathbb{R}^N respecto a una función de dimensión $\phi \in \mathcal{F}$ y en un punto x , para obtener estimaciones de la ϕ -medida de Hausdorff del conjunto de puntos donde dicha densidad está uniformemente acotada (por arriba o por debajo). Dicha densidad se calcula obteniendo primero, para cada $\delta > 0$, el supremo de los cocientes $\mu(R)/\phi(|R|)$ sobre todos los rectángulos N -dimensionales tales que $|R| < \delta$ y $x \in R$; y tomando después el ínfimo sobre todos los $\delta > 0$. Así se obtiene una magnitud local que evalúa el ratio asintótico entre la μ -medida que se concentra en un entorno a x y el tamaño geométrico de dicho entorno. Denotamos dicha densidad superior mediante $R\bar{d}_\mu^\phi(x)$. El teorema de densidad de Rogers-Taylor se puede enunciar como sigue. Suponer que μ es una medida de Borel de probabilidad en un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, y $A \subset K$; entonces

$$\text{Si } R\bar{d}_\mu^\phi(x) < a < +\infty \quad \text{para todo } x \in A, \text{ entonces } H^\phi(A) \geq Ca^{-1}\mu(A). \quad (3.2)$$

$$\text{Si } R\bar{d}_\mu^\phi(x) > b > 0, \quad \text{para todo } x \in A, \text{ entonces } H^\phi(A) \leq Cb^{-1}. \quad (3.3)$$

Los orígenes de las técnicas locales están en el trabajo de O. Frostman [Fro 35], que en su conocido lema relaciona la positividad de la ϕ -medida de Hausdorff de un conjunto A compacto (hay versiones para conjuntos más generales, ver [Tri 82] o [Mat]) con la existencia de una medida de Borel concentrada en $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\mu(B(x, r))/\phi(r) \leq 1 \quad (3.4)$$

para todo $r > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^N$. El recíproco, más sencillo, es lo que Falconer llama 'principio de distribución de masa' en [Fal 90]. Esta constituye una de las técnicas estándar para encontrar estimaciones inferiores para la dimensión de Hausdorff; se distribuye una medida μ sobre el conjunto A y se demuestra que la medida μ se comporta localmente como (3.4) para alguna $\phi(\xi) = \xi^t$, se sigue entonces que $\dim A \geq t$.

Una cuestión previa a la estimación de la ϕ -medida del conjunto A es estimar su dimensión. Para ello, se pueden usar también técnicas locales que estiman el exponente t , para el radio de una bola centrada en x , que 'calibra' la μ -medida de dicha bola. Este es el papel que juega la densidad logarítmica (inferior) de la medida μ (también se llama en la literatura *dimensión puntual* de la medida), que se define como el límite inferior (cuando el diámetro $|U(x)|$ tiende a cero) del ratio $\log \mu(U(x)) / \log |U(x)|$, donde $U(x)$ es un entorno del punto x (que varía dependiendo del contexto). Magnitudes asintóticas con el sabor de éstas, buscando exponentes de leyes potenciales, son las introducidas por Kolmogorov [KT 61], que no son sino las dimensiones (superior e inferior) de Minkowski [Rey 92].

El primero en utilizar densidades logarítmicas inferiores para estimar exponentes asociados a dimensión de Hausdorff, parece ser Billingsley [Bil 61] en el contexto de probabilidad en que él maneja la dimensión de Hausdorff. Los resultados abstractos de Billingsley se aplican de manera inmediata al intervalo unidad. El resultado de mayor aplicación se formula como sigue: Si A es un boreliano en $[0, 1]$ tal que $\mu(A) > 0$ para una medida de Borel finita que verifica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(u_n(x))}{\log |u_n(x)|} = a, \quad (3.5)$$

para algún $a \geq 0$ y para todo $x \in A$, entonces $\dim A = a$. Aquí $u_n(x)$ es el intervalo diádico (es decir, de la forma $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$) que contiene a x , y por tanto $|u_n(x)| = 2^{-n}$. Billingsley demostró este resultado usando recubrimientos de A . Tricot demuestra en un artículo de 1980 [Tri 80] este teorema de Billingsley usando los resultados de Rogers y Taylor sobre densidades no-logarítmicas. Ello ilustra el hecho de que las densidades no-logarítmicas de Rogers-Taylor y las densidades logarítmicas de Billingsley siguieron en un principio caminos independientes.

En 1982 C. Tricot exhibe, combinando el lema de Frostman y la idea de dis-

tribución de masa, la manera precisa en que las densidades logarítmicas inferiores esféricas

$$\alpha_\mu(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \quad (3.6)$$

(aquí los entornos $U(x)$ son bolas), están vinculadas a la dimensión de Hausdorff. En concreto, Tricot prueba la identidad

$$\dim A = \sup_{\{\mu: \mu(A) > 0\}} \inf_{x \in A} \alpha_\mu(x) \quad (3.7)$$

para todo conjunto A analítico o de Souslin, ver [Fal 85] para una definición. Dicha relación notable ya estaba de algún modo sugerida en la literatura de las dimensiones de Hausdorff. Más sorprendente aún es el hecho de que una identidad dual a (3.7) se verifique para la dimensión packing, cuya definición (1.8) involucra un paso más en complejidad que la medida de Hausdorff. Tricot demostró la identidad

$$\text{Dim} A = \inf_{\{\mu: \mu(A) < \infty\}} \sup_{x \in A} \bar{\alpha}_\mu(x), \quad (3.8)$$

donde

$$\bar{\alpha}_\mu(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$$

es la densidad logarítmica superior (esférica). La relación (3.8) supone una notable simplificación conceptual de la medida packing, al tiempo que la sitúa desempeñando un papel simétrico respecto a la dimensión de Hausdorff. Ello ha provocado que el cálculo de la dimensión packing se considere estándar y relevante asociado a los problemas de teoría geométrica de la medida. Una revisión de los teoremas locales que permiten estimar dimensión de Hausdorff y dimensión packing puede verse en [Rey 92].

En 1982 L.S. Young [You 82] demostró, inspirado en el teorema de Billingsley citado arriba, una versión N -dimensional del mismo con la densidad (3.5) reemplazada por la densidad logarítmica esférica de la medida

$$\alpha_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \log \mu(B(x, r)) / \log r.$$

El teorema dice que si $\mu(A) > 0$ y uniformemente en A se tiene $\alpha_\mu(x) = a$, entonces $\dim A = a$. Además, motivado por cuestiones de sistemas dinámicos dotados de una medida ergódica, Young mostró que eso implica que si $\alpha_\mu(x) = a$ μ -a.e. entonces $\dim \mu = a$. Este último resultado (que se conoce como teorema de Young), y en

general las técnicas locales, han tenido mucha trascendencia en la teoría y las aplicaciones para el cómputo de la dimensión de Hausdorff. DGSB consiguen de hecho el resultado de dimensión de la medida autosemejante encontrando que el valor de la densidad está dado μ -a.e. por $\alpha_\mu(x) = s(\mathbf{p})$.

Taylor y Tricot [TT 85] consideran la densidad inferior no-logarítmica *à la* Rogers–Taylor, y demuestran un teorema de densidad para la medida packing como el de Rogers–Taylor (3.2)–(3.3). Una versión de este teorema será necesaria en el capítulo 4 (ver la sección 4.3). Saint-Raymond y Tricot [ST 88] demostraron un teorema de densidad que se formula de manera idéntica para la medida packing y la medida de Hausdorff centrada, simplemente intercambiando los papeles de la densidad esférica inferior por la superior. H. Haase [Haa 87, Haa 88, Haa 90] ha extendido el teorema de densidad de Taylor–Tricot a contextos más generales.

Lo que se puede considerar como la versión de los resultados de Tricot en un contexto de dimensión de medidas fue desarrollada por C.D. Cutler [Cut 86, Cut 90]. Una breve exposición de algunos de sus resultados aparece en el capítulo 4, pues el punto de vista de Cutler es más adecuado para el modo en que allí se aborda el problema de la medida packing. En este capítulo, sin embargo, los técnicas que se usan las proporcionan resultados que se demuestran en el espíritu del teorema de densidad de Rogers–Taylor. Sólo el problema asociado a la medida de Hausdorff se considera en este capítulo, dejando el de la medida packing, que requiere ideas nuevas, para el siguiente.

3.2 Teoremas de densidad en conjuntos autosemejantes.

La utilidad de un teorema como el enunciado en (3.2)–(3.3) para el cálculo de la dimensión de Hausdorff reside en que se reduce una cuestión global (como es el cálculo de la medida de Hausdorff usando recubrimientos) a otra local (el cálculo de la densidad sobre los puntos del conjunto bajo estudio). Cuando, como en el caso que se trata en esta memoria, los conjuntos que se estudian están contruidos mediante procesos de intersección de familias de compactos particulares, las densidades en

(3.2)-(3.3), o incluso las densidades esféricas, pueden ser difíciles de evaluar. Sin embargo, el proceso de construcción proporciona, para cada punto x , una sucesión encajada de compactos $\{K_n(x)\}_n$ cuya intersección es x . Si además las medidas que se consideran son de tipo producto en el espacio de códigos que dirige la construcción, se tiene información precisa de cómo se comportan los ratios

$$\mu(K_n(x))/\phi(|K_n(x)|) \quad (3.9)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ sobre conjuntos de puntos amplios (en sentido de la medida, μ -a.e.).

De lo anterior se desprende la necesidad de traducir la información local que proporcionan los ratios en (3.9) sobre un conjunto dado en información sobre su medida de Hausdorff. En el caso de las construcciones autosemejantes E con espacio de estados M , los compactos naturales que conducen a $x = \pi(\mathbf{i})$, $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$, son los cilindros $\{E_{\mathbf{i}(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto se requiere un resultado que estime la medida de Hausdorff de conjuntos sobre los que la densidad sobre cilindros tiene un comportamiento uniforme. Alternativamente, como se ha hecho en la literatura para algunas construcciones disjuntas [CM 92, EM 92], el esfuerzo puede ir dirigido a traducir densidad en el espacio de códigos a densidad geométrica esférica. Este es esencialmente el modo en que se atacará el problema de la medida packing en el siguiente capítulo.

Sea $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $\Psi \in \mathcal{S}(M, N)$ verificando condición de abierto con un abierto V , y sea E el único compacto invariante asociado a Ψ . Recordar que $F = \bar{V}$. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ y μ la medida autosemejante inducida por \mathbf{p} en E (prescindiremos del subíndice \mathbf{p} por comodidad). Nuestra intención es definir una densidad ‘geométrica’ en $x \in E$ sobre cilindros, i.e. definida no en el espacio de códigos, sino en E . Eso añade una dificultad en nuestro caso: puesto que las construcciones que consideramos no son necesariamente disjuntas, se plantea el problema de decidir sobre qué secuencia de compactos (cuando hay varias disponibles) o cómo se evalúan los ratios de (3.9). La solución que damos es la siguiente.

Dada $\mu \in \mathcal{M}^+$, y una función de dimensión $\phi \in \mathcal{F}$ definimos la siguiente ϕ -densidad superior de μ sobre cilindros (geométricos) en $x \in E$

$$\bar{d}_\mu^\phi(x) = \sup \left\{ \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu(F_{\mathbf{i}(k)})}{\phi(r_{\mathbf{i}(k)})} : \mathbf{i} \in \pi^{-1}(x) \right\}. \quad (3.10)$$

Observar que el compacto $F_{i(k)}$ se puede sustituir en esta expresión por el conjunto compacto más pequeño $E_{i(k)}$. Llamaremos cilindros a ambos conjuntos indistintamente, y trabajaremos preferentemente con $F_{i(k)}$. Observar también que $r_{i(k)} = |F_{i(k)}|$ (recordar que se asumió en el capítulo 1 que $|V| = 1$). Escribiremos $\overline{d}_\mu^t(\cdot)$ cuando la función de dimensión sea potencial, i.e. $\phi(\xi) = \xi^t$.

Para demostrar el teorema 3.2.3 serán necesarios algunos lemas previos. Para cada bola B de radio $r > 0$, considerar la colección de cilindros $G(B)$ definida mediante

$$G(B) = \{F_{i(k)} : i \in M^{\mathbb{N}}, F_{i(k)} \cap B \neq \emptyset, r_{i(k)} < r \text{ pero } r_{i(k-1)} \geq r\}. \quad (3.11)$$

El siguiente lema fue demostrado en el caso particular de $\phi(\xi) = \xi^s$ por M.A. Martín y P. Mattila en 1988 [MM 88]. Aquí extendemos el resultado a la clase general de funciones de dimensión \mathcal{F} .

Lema 3.2.1 *Sea B una bola de radio $r > 0$, y sea $G(B)$ la colección en (3.11), entonces*

$$\text{i) } \text{card}G(B) \leq q < +\infty \text{ independientemente de } r \quad (3.12)$$

$$\text{ii) } \sum_{P \in G(B)} \phi(|P|) \leq q\phi(r) \text{ para toda } \phi \in \mathcal{F} \quad (3.13)$$

demostración:

La demostración de i) es bien conocida, se puede ver en detalle en [GMMR 93]. Es consecuencia del hecho de que cada cilindro de $G(B)$ contiene una bola B_i de radio mayor o igual que ρur , donde $\rho > 0$ es el radio de una bola contenida en V . Además la condición de abierto implica que todas las bolas B_i son disjuntas. Si se considera una bola B_{2r} concéntrica a B y con radio $2r$, se tiene que todas las bolas $\{B_i : i = 1, \dots, \text{card}G(B)\}$ están contenidas en B_{2r} , y por tanto para una constante C_N que sólo depende de la dimensión se tiene

$$\text{card}G(B) \leq \frac{C_N(2r)^N}{C_N(\rho ur)^N} = \left(\frac{2}{\rho u}\right)^N := q < +\infty,$$

que es lo que afirma i).

Ahora, para todo $F_{i(k)} \in G(B)$ se tiene $r_{i(k)} < r$, y puesto que ϕ es decreciente $\phi(r_{i(k)}) \leq \phi(r)$. Por tanto

$$\sum_{P \in G(B)} \phi(|P|) \leq \text{card}G(B)\phi(r) \leq q\phi(r),$$

y por tanto se tiene ii). \square

Decimos que una familia de conjuntos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $U_i \subset E$ para todo i , es μ -disjunta si $\mu(U_i \cap U_j) = 0$ para $i \neq j$. El siguiente lema es una consecuencia del Θ -lema, y se usará en la prueba del teorema de densidad 3.2.3.

Lema 3.2.2 *Sea $\mathcal{U} = \{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de cilindros en E , (i.e. $\mathcal{U} \subset \{E_i : i \in M^*\}$) tal que $C_i \not\subset C_j$ para $i \neq j$. Entonces \mathcal{U} es μ -disjunta.*

demostración:

Dos cilindros diferentes de \mathcal{U} (no contenido el uno en el otro) pueden intersecar. Suponer pues $i \neq j$ tales que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Sean $\mathbf{i} \in M^k$ y $\mathbf{j} \in M^l$, con $k, l \in \mathbb{N}$, tales que $C_i = E_i$ y $C_j = E_j$. Sea $n = \min\{q : i_q \neq j_q\}$. Así $\mathbf{i}(n) = \mathbf{j}(n)$, y por tanto

$$\begin{aligned} E_i \cap E_j &= \varphi_{\mathbf{i}(n)}(E_{i_{n+1}, \dots, i_k} \cap E_{j_{n+1}, \dots, j_l}) \subset \\ &\subset \varphi_{\mathbf{i}(n)}(\varphi_{i_{n+1}}(E) \cap \varphi_{j_{n+1}}(E)) \subset \varphi_{\mathbf{i}(n)}(\Theta) \subset \Theta^*. \end{aligned}$$

El Θ -lema implica entonces que $\mu(C_i \cap C_j) = 0$, y por tanto \mathcal{U} es μ -disjunto. \square

Como consecuencia del lema, todo recubrimiento de un subconjunto de E mediante cilindros se puede tomar μ -disjunto. Observar que el lema es igualmente cierto si se toman recubrimientos mediante cilindros F_i , $i \in M^*$. Ahora demostramos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.2.3 (de densidad)

Sea $\mu \in \mathcal{M}^+$ una medida autosemejante en E . Sea $A \subset E$, y $\phi \in \mathcal{F}$. Sean a y b dos constantes finitas y positivas. Entonces se tiene

i) Si $\sup_{x \in A} \bar{d}_\mu^\phi(x) < a$, entonces $H^\phi(A) \geq (aq)^{-1} \mu(A)$, donde q es la constante en (3.12) y A es \mathcal{C}_π -medible.

ii) Si $\inf_{x \in A} \bar{d}_\mu^\phi(x) > b$, entonces $H^\phi(A) \leq b^{-1} \phi^*$, donde ϕ^* es la constante en (1.6).

demostración:

i) Como se pretende obtener una cota inferior para la dimensión basta demostrar que la tesis se cumple para $A \setminus \Theta^*$. De esta manera, se tiene

$$H^\phi(A) \geq H^\phi(A \setminus \Theta^*) \geq (aq)^{-1} \mu(A \setminus \Theta^*) = (aq)^{-1} \mu(A),$$

como consecuencia del Θ -lema. Por tanto basta demostrar i) para $A \setminus \Theta^*$. Ahora, dado $x \in A \setminus \Theta^*$ hay un sólo código $i \in \pi^{-1}(x)$ de manera que el supremo en (3.10) es superfluo.

Observar que para todo $x \in A$ se tiene que $\bar{d}_\mu^\phi(x) < a - \varepsilon$ para algún $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$. Esto equivale a que $\mu(F_{i(k)}) < (a - \varepsilon)\phi(r_{i(k)})$ para todo $k > n(x)$. La técnica clásica consiste en clasificar ahora los puntos de A según el entero $n(x)$. Por tanto, para $n \in \mathbb{N}$, considerar el conjunto

$$A_n = \bigcap_{k \geq n} \{ \pi(i) \in A \setminus \Theta^* : i \in M^{\mathbb{N}}, \mu(F_{i(k)}) < (a - \varepsilon)\phi(r_{i(k)}) \text{ para algún } \varepsilon > 0 \}.$$

Claramente A_n es una sucesión no-decreciente de conjuntos tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \setminus \Theta^*$. Sea $0 < \delta < u^n$, y considerar un δ -recubrimiento $\mathcal{R}_n = \{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ de A_n mediante bolas. Tomar, para cada bola $B_j \in \mathcal{R}_n$, la colección de cilindros

$$G_n(j) = \{P \in G(B_j) : P \cap A_n \neq \emptyset\},$$

donde $G(B_j)$ es la colección de cilindros definida en (3.11). Observar que, dado que $\delta < u^n$, para todo $P \in G_n(j)$ se tiene que

$$\mu(P) < (a - \varepsilon)\phi(|P|) < a\phi(|P|), \tag{3.14}$$

puesto que P es un cilindro de generación posterior a n y contiene un punto de A_n . Por lo tanto, para el recubrimiento elegido se tiene

$$\sum_{B_j \in \mathcal{R}_n} \phi(|B_j|) \geq q^{-1} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in G_n(j)} \phi(|P|) \geq$$

$$\geq q^{-1}a^{-1} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{P \in G_n(j)} \mu(P) \geq (qa)^{-1} \mu(A_n),$$

donde la desigualdad (3.13), la desigualdad (3.14), y el hecho de que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in G_n(j)} P \supset A_n$ se han aplicado en ese orden. Entonces se tiene que

$$H_\delta^\phi(A) \geq H_\delta^\phi(A_n) \geq (aq)^{-1} \mu(A_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo δ tender a 0 se obtiene que $H^\phi(A) \geq (aq)^{-1} \mu(A_n)$ con n arbitrario. Como la medida $\mu(A_n)$ de hecho aumenta a la medida de A se tiene $H^\phi(A) \geq (qa)^{-1} \mu(A)$.

ii) Sea $\varepsilon > 0$ con $b - \varepsilon > 0$. Ahora para cada $x \in A$ se tiene que $\bar{d}_\mu^\phi(x) > b - \varepsilon/2$, y por tanto (de la definición (3.10)) existe algún $i_x \in \pi^{-1}(x)$ tal que la desigualdad

$$\mu(F_{i_x(k)}) > (b - \varepsilon)\phi(r_{i_x(k)}) \quad (3.15)$$

se verifica para infinitos valores de k . Para demostrar que la medida de Hausdorff es finita basta encontrar, para cada $\delta > 0$, un δ -recubrimiento \mathcal{R} del conjunto A que arroje una suma $\sum_{U \in \mathcal{R}} \phi(|U|)$ finita. Sea pues $\delta > 0$, y tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U^{k_0} < \delta$ (recordar que $U = \max_{i \in M} r_i$). Ahora para cada $x \in A$ considerar el entero $k(x)$ definido por

$$k(x) = \min\{k : k > k_0, \mu(F_{i_x(k)}) > (b - \varepsilon)\phi(r_{i_x(k)})\}, \quad (3.16)$$

donde $i_x \in \pi^{-1}(x)$ es el código elegido arriba. De (3.15) se tiene que $k(x)$ está bien definido, y puesto que $k(x) > k_0$ para todo $x \in A$ se tiene que $|F_{i_x(k(x))}| < \delta$. Por lo tanto la colección

$$\{F_{i_x(k)} : k = k(x), x \in A\}$$

es un δ -recubrimiento de A mediante cilindros, que por el lema 3.2.2 puede tomarse μ -disjunto. Denotando este δ -recubrimiento μ -disjunto por $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\delta)$, se tiene de (3.16)

$$\sum_{P \in \mathcal{U}} \phi(|P|) \leq (b - \varepsilon)^{-1} \sum_{P \in \mathcal{U}} \mu(P) \leq (b - \varepsilon)^{-1} \mu(E),$$

puesto que \mathcal{U} es μ -disjunto. Por lo tanto $H_\delta^\phi(A) \leq (b - \varepsilon)^{-1}$, y puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene el resultado. Puesto que H^ϕ denota medida de Hausdorff esférica (ver la sección 1.1), y los recubrimientos $\mathcal{U}(\delta)$ obtenidos son recubrimientos por cilindros, se debe usar la relación (1.7) para que la afirmación ii) sea precisa. \square

Nota 3.2.4 Observar que la prueba del teorema 3.2.3 no hace uso del hecho de que la medida μ sea una medida producto, excepto porque debe aplicarse el Θ -lema. El teorema anterior por tanto es válido para medidas μ más generales que tengan la propiedad de que el conjunto Θ^* tenga μ -medida nula. Esto sucede en general cuando la construcción autosemejante es disjunta ($\Theta^* = \emptyset$), o cuando el conjunto de solapamiento Θ^* es numerable. Bajo alguna de las anteriores hipótesis, cualquier medida finita μ cuya σ -álgebra contenga a los cilindros geométricos (por ejemplo, una medida de Borel, ya que estos conjuntos son compactos) verifica el teorema con cambios menores. En concreto, el conjunto A en i) debe estar en la σ -álgebra de la medida, y la estimación que se obtiene en ii) es $H^\phi(A) \leq b^{-1} \phi^* \mu(E)$. Observar también que la hipótesis i) puede debilitarse a que A contenga un conjunto de μ -medida positiva para el que la densidad \bar{d}_μ^ϕ está uniformemente acotada por arriba.

Los resultados de densidad de Taylor y Tricot [TT 85] y de Saint-Raymond y Tricot [ST 88] son más ajustados que la parte ii) en el teorema de densidad anterior, en el sentido de que consiguen demostrar que $H^\phi(A) \leq Cb^{-1} \mu(A)$ con una constante $C > 0$, si la densidad superior esférica que ellos manejan está uniformemente acotada por debajo en A por la constante b . Observar que esto es más fuerte que la afirmación ii) en el teorema 3.2.3. Se puede conseguir esta mejora en nuestro caso también, pero una condición más fuerte que la exigida en ii), $\bar{d}_\mu^\phi(x) > b$ para cada $x \in A$, es necesaria. Aunque esta mejora no será precisa en lo que sigue, ilustra bien como está articulada la densidad que hemos definido en (3.10); y por ello se recoge el resultado en la siguiente proposición

Proposición 3.2.5 Sea $A \in \mathcal{C}_\pi \cap E$. Si

$$\inf_{x \in A} \inf_{i \in \pi^{-1}(x)} \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{i(k)})}{\phi(r_{i(k)})} \right\} > b, \quad (3.17)$$

entonces

$$H^\phi(A) \leq b^{-1} \phi^* \mu(A). \quad (3.18)$$

demostración:

Sea $0 < \varepsilon < b$. Observar que la condición (3.17) implica ahora que, para cada $x \in A$, la desigualdad

$$\mu(F_{i(k)}) > (b - \varepsilon)\phi(r_{i(k)}) \quad (3.19)$$

se verifica para infinitos valores de $k \in \mathbb{N}$, pero también para todos los códigos $i \in \pi^{-1}(x)$. Esto permite recubrir bien el conjunto A mediante cilindros de modo que la desigualdad anterior se verifique para los cilindros del recubrimiento (o sus descendientes). Sea $\xi > 0$ arbitrario, y tomar un recubrimiento $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A mediante cilindros geométricos tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_i) < \mu(A) + \xi. \quad (3.20)$$

Sea $\delta > 0$ y tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U^{k_0} < \delta$. Ahora, para cada $x \in A \cap C_i$, elegir el entero

$$k(x) = \min\{k : k > k_0, \mu(F_{i(k)}) > (b - \varepsilon)\phi(r_{i(k)}), F_{i(k)} \subset C_i \text{ para algún } i := i_x \in \pi^{-1}(x)\}.$$

Observar que $k(x)$ está bien definido para todo $x \in A$, puesto que $\bigcup_i C_i$ cubre A , y (3.19) se verifica para todo $i \in \pi^{-1}(x)$. Observar también que no basta con que (3.19) se verifique para un código i_x especial, como en el teorema 3.2.3 ii), ya que una secuencia $\{F_{i(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ puede no verificar (3.19) para ningún $k \in \mathbb{N}$, y sin embargo ser la única que proporciona un cilindro contenido en el cilindro C_i tal que $x \in C_i$. En tal caso $k(x)$ no estaría bien definido.

La colección $\mathcal{U} = \{F_{i_x(k)} : k = k(x), x \in A\}$ es un δ -recubrimiento de A (puesto que $k(x) > k_0$ para cada $x \in A$), y del lema 3.2.2 puede tomarse μ -disjunto. Como $\bigcup_{P \in \mathcal{U}} P \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{U}} \phi(|P|) &\leq (b - \varepsilon)^{-1} \sum_{P \in \mathcal{U}} \mu(P) \leq \\ &\leq (b - \varepsilon)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_i) \leq (b - \varepsilon)^{-1}(\mu(A) + \xi). \end{aligned}$$

Haciendo δ tender a 0 se tiene $H^\phi(A) \leq (b - \varepsilon)^{-1}(\mu(A) + \xi)$, y puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario $H^\phi(A) \leq b^{-1}(\mu(A) + \xi)$. Por último, toda la construcción es válida para $\xi > 0$ arbitrario, y por tanto se sigue el resultado. \square .

Nota 3.2.6 Podría haberse definido la ϕ -densidad superior como en (3.17) en lugar de la definición (3.10) que hemos elegido, es decir tomando el ínfimo de los límites

$\limsup_k \mu(F_{i(k)})/\phi(r_{i(k)})$ sobre $\pi^{-1}(x)$ en lugar del supremo como en (3.10). De este modo se consigue que la estimación (3.18) de la proposición 3.2.5 sustituya a la afirmación más débil ii) del teorema 3.2.3. Sin embargo, se comprobará que la elección del supremo en (3.10) es la adecuada para los resultados que aquí se obtienen. Observar también que ambas definiciones coinciden en el conjunto $E \setminus \Theta^*$, y por tanto la estimación (3.17) se verifica para todo $A \in E \setminus \Theta^*$.

En ocasiones, no se puede disponer de una información tan ‘fina’ como la que proporciona las densidades no-logarítmicas, y sin embargo, sí se puede calibrar el comportamiento potencial de la medida de los cilindros en términos de su diámetro, i.e. se puede estimar la densidad logarítmica de la medida. De este modo, se pueden debilitar las hipótesis del teorema 3.2.3 sobre la densidad \bar{d}_μ^ϕ en los puntos de A a costa, claro está, de obtener información sólo sobre la dimensión de A . Ahora introducimos una densidad logarítmica que se evalúa sobre cilindros, y que está definida en el espacio geométrico. La densidad logarítmica que está naturalmente asociada a la densidad no-logarítmica \bar{d}_μ^ϕ es la que definimos a continuación. Para $\mu \in \mathcal{M}^+$, y $x \in E$ se define la *densidad logarítmica inferior* (cilíndrica) de μ en x mediante

$$\underline{D}_\mu(x) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(F_{i(k)})}{\log r_{i(k)}} : i \in \pi^{-1}(x) \right\}. \quad (3.21)$$

El resultado de densidad que se tiene ahora es el siguiente

Teorema 3.2.7 (de densidad logarítmica)

Sea $\mu \in \mathcal{M}^+$, y $A \subset C_\pi$. Entonces se tiene

i) Si $\inf_{x \in A} \underline{D}_\mu(x) \geq \alpha$ y $\mu(A) > 0$, entonces $\dim A \geq \alpha$.

ii) Si $\sup_{x \in A} \underline{D}_\mu(x) \leq \beta$, entonces $\dim A \leq \beta$.

demostración:

La demostración del teorema se reduce al teorema de densidad 3.2.3.

i) Sea $t < \alpha$. De la hipótesis se tiene que $\underline{D}_\mu(x) > t$ para todo $x \in A$ y para un

$t' > t$. Sea $x \in A$. De la definición (3.21) entonces se deduce que la desigualdad

$$\log \mu(F_{i(k)}) < t \log r_{i(k)} \quad (3.22)$$

se verifica para todo $i \in \pi^{-1}(x)$ y para todo k suficientemente grande. Observar que (3.22) implica entonces que la desigualdad

$$\frac{\mu(F_{i(k)})}{r_{i(k)}^t} < 1$$

se verifica para todo $i \in \pi^{-1}(x)$ y para todo k suficientemente grande. Esto es equivalente a que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu(F_{i(k)})/r_{i(k)}^t < 1,$$

para todo $i \in \pi^{-1}(x)$ y por tanto la t -densidad no-logarítmica verifica $\bar{d}_\mu^t(x) < 1$. Hemos demostrado por tanto que para todo $x \in A$ se tiene $\bar{d}_\mu^t(x) < 1$, y por tanto el teorema de densidad 3.2.3 implica que $H^t(A) \geq q^{-1}\mu(A)$. Como $\mu(A) > 0$, se tiene que $H^t(A) > 0$ para $t < \alpha$ arbitrario. De la definición de dimensión de Hausdorff se tiene entonces que $\dim A \geq \alpha$ como se quería demostrar.

ii) La demostración es similar a la de la parte i). Sea ahora $t > \beta$, de modo que para todo $x \in A$ se tiene

$$\log \mu(F_{i_x(k)}) > t \log r_{i_x(k)} \quad (3.23)$$

para (al menos) un código particular $i_x \in \pi^{-1}(x)$, y para infinitos valores de k . Esto se puede formular equivalentemente como que la desigualdad

$$\frac{\mu(F_{i_x(k)})}{r_{i_x(k)}^t} > 1$$

se verifica infinitamente a menudo en k sobre un código i_x que proyecta sobre x , y ésto se tiene para todos los puntos $x \in A$. Esta desigualdad por tanto se puede expresar en términos de la densidad no-logarítmica mediante

$$\bar{d}_\mu^t(x) > 1$$

para cada $x \in A$. El teorema de densidad 3.2.3 ii) implica por tanto que $H^t(A) \leq 2^t < +\infty$, i.e. $\dim A \geq t$. Como $t > \alpha$ arbitrario se sigue ii). \square

Nota 3.2.8 Los comentarios de la nota 3.2.4 son también aplicables en el contexto del teorema 3.2.7.

Los resultados de densidad 3.2.3 y 3.2.7 pueden formularse sin dificultad en términos de la dimensión de Hausdorff de conjuntos que se obtienen mediante la proyección por π (ver (1.14)) de conjuntos de códigos de $M^{\mathbb{N}}$ con propiedades de densidad adecuadas. Por ejemplo, en el caso de la densidad logarítmica el resultado es como sigue.

Corolario 3.2.9 *Sea $\nu \equiv \nu_{\mathcal{P}}$ la medida producto en $M^{\mathbb{N}}$ inducida por $\mathcal{P} \in \mathcal{P}^+$, y sea $B \subset M^{\mathbb{N}}$. Entonces se tiene*

$$\text{i) Si } \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{\log r_{\mathbf{i}(k)}} \geq \alpha \text{ y } \nu(B) > 0, \text{ entonces } \dim \pi(B) \geq \alpha.$$

$$\text{ii) Si } \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{\log r_{\mathbf{i}(k)}} \leq \beta, \text{ entonces } \dim \pi(B) \leq \beta.$$

demostración:

i) Se sigue del teorema 3.2.7 si se considera $A = \pi(B) \setminus \Theta^*$. Observar que para todo $x \in A$ se tiene un único $\mathbf{i} = \pi^{-1}(x)$ y por tanto $\underline{D}_{\mu}(x) \geq \alpha$. Aplicar ahora el teorema 3.2.7 a A y se tiene $\dim \pi(B) \geq \dim A \geq \alpha$.

ii) Ahora claramente $\underline{D}_{\mu}(x) \leq \beta$ para todo $x \in \pi(B)$, y por tanto el teorema 3.2.7 ii) implica el resultado. \square

Es claro que un resultado similar al teorema de densidad 3.2.3 puede enunciarse, igual que el corolario 3.2.9, en términos de $B \subset M^{\mathbb{N}}$ y su proyección $\pi(B) \subset E$, como en el anterior teorema.

Nota 3.2.10 Una observación interesante relativa al teorema 3.2.7 es la siguiente. Notar que no es necesario exigir que la μ -medida de A sea positiva para la estimación superior de la dimensión (parte ii)), esta acotación se tiene independientemente de cuál es la medida de A . Sin embargo, la exigencia $\mu(A) > 0$ es crucial para obtener la estimación por debajo de la dimensión de Hausdorff de A . En ocasiones los conjuntos que se consideran son de μ -medida nula y sin embargo geoméricamente importantes

(pueden tener dimensión de Hausdorff grande). Dos ejemplos de esta naturaleza se exhiben en la sección 5.3 (son los conjuntos que allí se denotan por Ξ y R_p). Es por tanto interesante debilitar la hipótesis $\mu(A) > 0$ en el teorema 3.2.7 de modo que aún se tenga $\dim A \geq \alpha$. Tal resultado puede conseguirse si el conjunto de ν -medida nula $\pi^{-1}(A)$ es 'suficientemente grande'. Para estimar el tamaño de los sucesos de probabilidad nula, Billingsley introdujo en 1961 la dimensión de Hausdorff en teoría de probabilidad. De esta manera, si un conjunto de ν -medida nula tiene dimensión de Hausdorff-Billingsley plena, todavía se respeta la desigualdad ii) del teorema 3.2.7. Este resultado se demuestra en la sección 5.3, y se aplica a los ejemplos mencionados.

3.3 Singularidad de las medidas autosemejantes respecto a la medida de Hausdorff en su dimensión.

En esta sección se usarán las técnicas locales de la sección anterior para estudiar la geometría de las medidas autosemejantes. Es claro que la dimensión de μ da una idea de la 'concentración' de la medida, y por tanto de su geometría. Como se ha explicado en el capítulo 1, se sabe que la medida μ_p es singular respecto a H^t para $t > s(p)$. Aquí se demostrará que éste es también el caso para la medida de Hausdorff $H^s(p)$.

En primer lugar formularemos condiciones locales, i.e. en términos de las densidades introducidas en la sección anterior, equivalentes a la singularidad o continuidad de la medida respecto a una medida de Hausdorff dada. Para ello hemos de generalizar un resultado clásico de teoría geométrica de la medida. Dada una medida de Borel μ en \mathbb{R}^N , en 1961 C.A. Rogers y S.J. Taylor [RT 61] caracterizaron la singularidad/continuidad de μ respecto a una medida de Hausdorff H^ϕ en términos de la ϕ -densidad superior \overline{Rd}_μ^ϕ sobre rectángulos de \mathbb{R}^N (la definición se dio en el primer párrafo de la sección 3.1). El resultado clave para obtener una caracterización de este tipo en términos de otra función de punto tipo-densidad d como la que hemos definido en (3.10) resulta ser un teorema como el 3.2.3 que

hemos probado en la sección anterior. Aunque las medidas autosemejantes son de Borel, el resultado que probamos a continuación se verifica para medidas generales. Incluso cuando, como en nuestro caso, la medida μ es de Borel no es necesario exigir medibilidad Borel a la función d .

Se dice que una medida μ , con σ -álgebra \mathcal{A} , tiene representación integral respecto a la medida de Hausdorff H^ϕ si existen $E_0 \in \mathcal{A}$ con H^ϕ -medida σ -finita y una función H^ϕ -integrable f tales que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene $\mu(A) = \int_{A \cap E_0} f(x) dH^\phi$.

Teorema 3.3.1 (Extensión del Teorema de Rogers–Taylor (medidas de Hausdorff))
Sea μ una medida en \mathbb{R}^N con σ -álgebra \mathcal{A} , y sea $\phi \in \mathcal{F}$. Suponer que existen una función de punto \mathcal{A} -medible

$$d = d_{(\mu, \phi)} : \mathbb{R}^N \mapsto [0, +\infty],$$

y una constante $C > 0$ verificando las propiedades

- (i) *Si $d(x) < a$ para todo $x \in A$ con $A \in \mathcal{A}$, entonces $aCH^\phi(A) \geq \mu(A)$.*
- (ii) *Si $d(x) > b$ para todo $x \in A$, entonces $H^\phi(A) \leq Cb^{-1}$.*

Entonces

- (a) *μ es continua respecto a H^ϕ si y sólo si $d(x) < +\infty$ μ -a.e.*
- (b) *μ es singular respecto a H^ϕ si y sólo si $d(x) = +\infty$ μ -a.e.*
- (c) *μ tiene representación integral respecto a H^ϕ si y sólo si $0 < d(x) < +\infty$ μ -a.e.*

demostración:

Se hace la demostración en varios pasos. Primero se demuestran tres hechos que se tienen como consecuencia de las hipótesis (i) y (ii) del teorema, y después se usan éstos para probar las tesis (a), (b) y (c).

(1) Si $d(x) = +\infty$ para todo $x \in A$, entonces $H^\phi(A) = 0$.

Sea $K \in \mathbb{N}$, y considerar el conjunto \mathcal{A} -medible $D_K = \{x : d(x) > K\}$. Como $A \subset \bigcap_{K \in \mathbb{N}} D_K$ se tiene de (ii) que $H^\phi(A) \leq H^\phi(D_K) \leq CK^{-1}$. Como K es arbitrario se sigue que $H^\phi(A) = 0$.

(2) Sea $A \in \mathcal{A}$. Si $d(x) < +\infty$ μ -a.e. en A y $H^\phi(A) = 0$, entonces $\mu(A) = 0$. Puesto que $\mu(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap \{x : d(x) < n\})$ se tiene de (i) que $\mu(A \cap \{x : d(x) < n\}) \leq nCH^\phi(A) = 0$, y por tanto $\mu(A) = 0$.

(3) Sea $A \in \mathcal{A}$. Si $d(x) = 0$ para todo $x \in A$, y A tiene H^ϕ -medida σ -finita, entonces $\mu(A) = 0$.

Sea $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ con $H^\phi(A_i) < +\infty$. Puesto que para cada i

$$A_i \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{x : d(x) < m^{-1}\}$$

se tiene de (i) que $\mu(A_i) \leq m^{-1}CH^\phi(A_i)$. Como $H^\phi(A_i)$ es finita y m es arbitrario $\mu(A_i) = 0$, y así $\mu(A) = 0$ también.

A continuación se prueban las tesis del teorema.

(a) (si) Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $H^\phi(A) = 0$. Puesto que $d(x) < +\infty$ se tiene de (2) que $\mu(A) = 0$ y por tanto μ es continua respecto a H^ϕ .

(sólo si) Asumir que μ es continua respecto a H^ϕ . Como se tiene siempre (ver (1)) que $H^\phi(\{x : d(x) = +\infty\}) = 0$, entonces $\mu(\{x : d(x) = +\infty\}) = 0$, y entonces $d(x) < +\infty$ μ -a.e.

(b) (si) Como $H^\phi(\{x : d(x) = +\infty\}) = 0$ en general, y el conjunto $\{x : d(x) = +\infty\}$ es \mathcal{A} -medible, se tiene que μ es singular respecto a H^ϕ .

(sólo si) Sea $E_0 \in \mathcal{A}$ tal que $H^\phi(E_0) = 0$ con E_0 concentrando la medida μ . Puesto que $E_0 \cap \{x : d(x) < +\infty\}$ es \mathcal{A} -medible, si se aplica (2) se tiene que $\mu(E_0 \cap \{x : d(x) < +\infty\}) = 0$, y por tanto $d(x) = +\infty$ μ -a.e.

(c) (si) Como $d(x) < +\infty$ μ -a.e se tiene de (a) que μ es continua respecto a H^ϕ . Considerar ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $D_m = \{x : d(x) > m^{-1}\}$. De (ii)

se tiene que $H^\phi(D_m) < Cm$ y por tanto el conjunto $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$ tiene H^ϕ -medida σ -finita y concentra la medida μ . El teorema de Radon-Nykodim (ver e.g. [Rud 79]) implica entonces que la medida μ tiene representación integral respecto a la medida H^ϕ , en los términos especificados arriba.

(sólo si) Asumir que la medida μ tiene representación integral respecto a la medida H^ϕ , i.e. $\mu(A) = \int_{A \cap E_0} f(x) dH^\phi(x)$ con $E_0 \in \mathcal{A}$ de H^ϕ -medida σ -finita. En particular esto implica que μ es continua respecto a H^ϕ , y de (a) se tiene que $\mu(\{x : d(x) = +\infty\}) = 0$. Como E_0 tiene H^ϕ -medida σ -finita se tiene de (3) que

$$\mu(E_0 \cap \{x : d(x) = 0\}) = 0.$$

Por tanto $\mu(E_0 \cap \{x : 0 < d(x) < +\infty\}) = 1$ y se sigue el resultado. Esto concluye la demostración del teorema. \square

Aplicaremos el teorema anterior a la medida autosemejante μ_p , con la densidad \bar{d}_μ^ϕ desempeñando el papel de la función de punto d en las hipótesis del teorema. Puesto que el teorema de densidad 3.2.3 proporciona las hipótesis i) y ii) del teorema de Rogers-Taylor (basta tomar la constante $C = \max\{\phi^*, q\}$), sólo es necesario comprobar que la función de punto \bar{d}_μ^ϕ es \mathcal{C}_π -medible. Ese es el contenido de la

Proposición 3.3.2 Sea $\mu \in \mathcal{M}^+$ una medida autosemejante, y sea $\phi \in \mathcal{F}$. Entonces la ϕ -densidad superior $\bar{d}_\mu^\phi : \mathbb{R}^N \mapsto [0, +\infty]$ definida en 3.10 es \mathcal{C}_π -medible.

demostración:

Basta demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$D_a = \{x : \bar{d}_\mu^\phi < a\} \tag{3.24}$$

es \mathcal{C}_π -medible.

Considerar en primer lugar para cada $k \in \mathbb{N}$ la aplicación $f_k : M^{\mathbb{N}} \mapsto [0, +\infty)$ definida por

$$f_k(\mathbf{i}) = \frac{\nu(\mathbf{i}(k))}{\phi(\tau_{\mathbf{i}(k)})}$$

Como f_k es constante sobre cilindros es continua en $M^{\mathbb{N}}$, y por tanto Borel-medible. Como la σ -álgebra \mathcal{C} contiene a los conjuntos de Borel de $M^{\mathbb{N}}$ se tiene que f_k es \mathcal{C} -medible. Por lo tanto

$$f(\mathbf{i}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{i}) \quad (3.25)$$

es \mathcal{C} -medible. Ahora observar que la densidad \bar{d}_μ^ϕ está dada por

$$\bar{d}_\mu^\phi(x) = \sup_{\mathbf{i} \in \pi^{-1}(x)} f(\mathbf{i}),$$

con $f(\mathbf{i})$ como en (3.25). El hecho de que la densidad \bar{d}_μ^ϕ sea \mathcal{C}_π -medible es esencialmente consecuencia del isomorfismo de espacios de medida que se demostró en el teorema 2.3.1. Se procede como sigue. Descomponer E como $E = (E \setminus \Theta^*) \cup \Theta^*$, de modo que si se considera

$$\mathbb{B} := \pi^{-1}(E \setminus \Theta^*) = M^{\mathbb{N}} \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$$

la aplicación $\pi|_{\mathbb{B}}$ es una biyección. Como consecuencia $\pi|_{\mathbb{B}}$ transforma conjuntos \mathcal{C} -medibles en $M^{\mathbb{N}}$ en conjuntos \mathcal{C}_π -medibles en E . Para probar esta afirmación suponer lo contrario, i.e. $\pi(A)$ no es \mathcal{C}_π -medible para un $A \in \mathcal{C} \cap \mathbb{B}$, donde \mathcal{C} es la σ -álgebra de los cilindros en $M^{\mathbb{N}}$. Como π es una biyección en los subconjuntos de \mathbb{B} se tiene que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, y de aquí una contradicción con que $A \in \mathcal{C}$ (recordar que por definición $B \subset E$ es \mathcal{C}_π -medible si $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{C}$).

Descomponer entonces el conjunto D_a en (3.24) como

$$D_a = (D_a \cap (E \setminus \Theta^*)) \cup (D_a \cap \Theta^*).$$

Del Θ -lema se tiene que $D_a \cap \Theta^*$ tiene μ -medida nula, y por lo tanto (si se considera la medida μ completa) es \mathcal{C}_π -medible. El conjunto $D_a \cap (E \setminus \Theta^*)$ es \mathcal{C}_π -medible como consecuencia de que está contenido en \mathbb{B} , y $\pi|_{\mathbb{B}}$ transforma medibles en medibles como se ha probado arriba. Por tanto D_a es \mathcal{C}_π -medible como unión de conjuntos \mathcal{C}_π -medibles. \square

El teorema de Rogers-Taylor reduce por tanto el problema de la geometría de una medida autosemejante $\mu \in \mathcal{M}^+$ al estudio del comportamiento 'típico' de las densidades \bar{d}_μ^ϕ . Si se considera la familia $\phi(\xi) = \xi^t$, $t \geq 0$, y se entiende el comportamiento μ -'casi seguro' de las densidades \bar{d}_μ^t para $t \geq 0$, entonces se resuelve

el problema de la dimensión de μ . La teoría de probabilidad permite entender ese comportamiento, y resolver por tanto el problema. A continuación se da una demostración breve del hecho conocido de que la dimensión de $\mu_{\mathbf{p}}$ es $s(\mathbf{p})$. Con ello se busca ilustrar el modo en que se combinan las técnicas locales y la probabilidad para, vía el teorema 3.3.1, obtener resultados acerca de la geometría de $\mu_{\mathbf{p}}$.

La siguiente notación se empleará repetidamente durante éste y los siguientes capítulos. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y sea ν la medida producto $\prod_1^\infty \mathbf{p}$ en $M^{\mathbb{N}}$. Sea $Z : M \mapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria en M . La notación $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ denota el proceso estocástico independiente (bajo ν) asociado a Z en $M^{\mathbb{N}}$; esto es, para cada $j \in \mathbb{N}$, $Z_j : M^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}$ está dado por

$$Z_j = Z \circ \text{pr}_1 \circ \tau^j, \quad (3.26)$$

donde $\text{pr}_1 : M^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}$ es la proyección sobre la primera coordenada

$$\text{pr}_1(i_1, i_2, \dots) = i_1,$$

y τ es la aplicación *shift* definida en (2.9). La sucesión de v.a. $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de pruebas repetidas o pruebas de Bernouilli. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la expresión $S_k^Z(\mathbf{i})$ significará

$$S_k^Z(\mathbf{i}) = \sum_{j=1}^k Z_j(\mathbf{i}), \quad (3.27)$$

para $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$. La esperanza de la variable Z respecto a la distribución de probabilidad \mathbf{p} en M se denotará mediante $\mathcal{E}[Z]$, cuando \mathbf{p} esté fijado en la discusión y se sobreentienda por tanto en esa notación.

Teorema 3.3.3 *Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$, y $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, entonces*

$$\text{Dim} \mu_{\mathbf{p}} = \dim \mu_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}), \quad (3.28)$$

donde $\mu_{\mathbf{p}}$ es la medida autosemejante asociada al par (Ψ, \mathbf{p}) , y $s(\mathbf{p})$ está definido en (3.1).

demostración:

Sea $t > 0$, y considerar la familia de variables aleatorias en M definidas por

$$X^{(t)}(i) = \log p_i - t \log r_i. \quad (3.29)$$

Observar que $\mathcal{E}[X^{(t)}] = \sum_{i \in M} p_i (\log p_i - t \log r_i) = 0$ si y sólo si $t = s(\mathbf{p})$, mientras que $\mathcal{E}[X^{(t)}] > 0$ para $t > s(\mathbf{p})$ y $\mathcal{E}[X^{(t)}] < 0$ para $t < s(\mathbf{p})$. Por lo tanto, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t > s(\mathbf{p}) \\ -\infty & \text{si } t < s(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (3.30)$$

para ν -casi todo $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$, puesto que la ley fuerte de los grandes números implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} S_n^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) = \mathcal{E}[X^{(t)}]$ ν -a.e. Sea $x \in \pi(\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)})$ donde $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ es el conjunto de Besicovitch fino de $M^{\mathbb{N}}$ definido en (2.28). Puesto que la proyección π es una biyección en $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, la densidad $\bar{d}_{\mu}^t(x)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \bar{d}_{\mu}^t(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^n p_{i_j}}{\prod_{j=1}^n r_{i_j}^t} = \\ &= \exp\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\log p_{i_j} - t \log r_{i_j})\right) = \\ &= \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n^{X^{(t)}}(\mathbf{i})), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{i} = \pi^{-1}(x)$. Por lo tanto, de (3.30) se tiene μ -a.e.

$$\bar{d}_{\mu}^t(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t > s(\mathbf{p}) \\ 0 & \text{si } t < s(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (3.31)$$

El teorema 3.3.1 implica entonces que μ es singular respecto a H^t si $t > s(\mathbf{p})$, y continua respecto a H^t si $t < s(\mathbf{p})$. Ello equivale a la afirmación (3.28). La afirmación sobre la dimensión packing se puede obtener como consecuencia de resultados más fuertes de la sección 4.3. También se puede obtener como explica la nota debajo. \square

Nota 3.3.4 Podría haberse usado la ley fuerte de grandes números para obtener directamente que $D_{\mu}(x) := \underline{D}_{\mu}(x) = \bar{D}_{\mu}(x) = s(\mathbf{p})$ para un conjunto de μ -medida uno (la densidad logarítmica superior cilíndrica $\bar{D}_{\mu}(\cdot)$ se define como la definición en (3.21) pero con límite superior en lugar de límite inferior). El teorema de densidad logarítmica 3.2.7 prueba entonces que esto basta para probar que $\dim \mu = s(\mathbf{p})$, como en el teorema de Young (ver la sección 3.1). A continuación se muestra esta

afirmación. Del teorema 3.2.7 se sigue que $\dim\{x : D_\mu(x) = s(\mathbf{p})\} = s(\mathbf{p})$, puesto que éste es un conjunto de μ -medida plena. La cota superior $\dim\mu \leq s(\mathbf{p})$ es obvia. Para obtener la cota inferior, sea Y \mathcal{C}_π -medible con $\mu(Y) = 1$. Si se considera el conjunto de μ -medida plena $\hat{Y} = Y \cap \{x : D_\mu(x) = s(\mathbf{p})\}$ se tiene del teorema 3.2.7 que $\dim\hat{Y} \geq s(\mathbf{p})$ y por lo tanto $\dim\mu \geq s(\mathbf{p})$. La afirmación sobre la dimensión packing de la medida se sigue de que la medida es regular, i.e. existe la densidad $D_\mu(x)$ μ -a.e., y exacta, i.e. $D_\mu(x) = \text{cte.}$ μ -a.e.; y de los resultados de C.D. Cutler [Cut 90]. Una breve exposición del trabajo de Cutler puede verse en la sección 4.1.

Encontrar el comportamiento 'potencial' de la medida μ consiste en encontrar un $t \geq 0$ verificando una 'ley' del tipo

$$\log \mu(U(x)) \sim t \log |U(x)| \quad \mu - \text{a.e.} \quad (3.32)$$

cuando $|U(x)|$ se aproxima 0. $U(x)$ es un 'entorno' de x de alguna clase: rectángulos, bolas, cilindros..., dependiendo de la densidad d que se considere. Si se verifican las hipótesis del teorema 3.3.1 para d , se sigue, como se ha visto en la nota anterior, que $\dim\mu = t$. Observar que (3.32) se verifica para un miembro derecho de la forma $\log |U(x)|^t g(|U(x)|)$, donde g es una función cualquiera verificando

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\log g(\xi)}{-\log \xi} = 0. \quad (3.33)$$

En tal caso se puede decir de manera 'gruesa' que $\mu(U(x)) \sim |U(x)|^t$. Por 'grueso' debe entenderse 'logarítmicamente'. Mientras que g no desempeña ningún papel en la densidad logarítmica, éste es crucial para la densidad no-logarítmica, que como se ha visto está relacionada con cuestiones más finas relativas a las medidas H^ϕ . La solución óptima al problema de la medida consiste en encontrar la función de dimensión ϕ que 'equilibra' el comportamiento local de la medida, en el sentido de que $\mu(U(x)) \sim |U(x)| g(|U(x)|)$ μ -a.e. cuando $|U(x)| \rightarrow 0$ (el símbolo ' \sim ' debe entenderse aquí como que el límite (superior) del cociente entre ambos miembros es constante). Así la función de densidad d está acotada en μ -casi todo punto. El teorema 3.3.1 afirma entonces que μ tiene representación integral respecto a la medida de Hausdorff H^ϕ con $\phi(\xi) = \xi^t g(\xi)$. Puede pensarse que tales medidas juegan el papel correspondiente a los ϕ -conjuntos, i.e. conjuntos A tales que $0 < H^\phi(A) < +\infty$.

Resuelta la cuestión referente a la dimensión de la medida, el objetivo en principio es encontrar una función de dimensión ϕ que 'calibra' la función potencial de la dimensión, en el sentido de que

$$\phi(\xi) = \xi^{\dim \mu} g(\xi) \quad (3.34)$$

con g verificando (3.33); y tal que 'equilibra' la medida μ localmente, esto es

$$0 < \limsup_{\xi \rightarrow 0} \frac{\mu(U(x))}{\phi(|U(x)|)} < +\infty. \quad (3.35)$$

Tal objetivo puede ser demasiado ambicioso en muchas ocasiones, ya que no hay *a priori* modo de determinar el *calibrado* adecuado para la función potencial. Sin embargo, un poco más de teoría de probabilidad proporciona de modo natural una familia paramétrica de funciones de dimensión, y un valor de corte del parámetro tal que el comportamiento de la densidad d cambia de modo drástico para valores por encima y debajo del valor de corte. Esto es un refinamiento de lo que sucede con el valor de corte $\dim \mu$ y la familia ξ^t (ver (3.31)).

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y μ la medida autosemejante asociada. Sea $\mathcal{G}_H = \{\phi_\alpha : \alpha \geq 0\}$ la familia uniparamétrica de funciones de variable real

$$\phi_\alpha(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})} \exp\{\alpha(2 \log \xi^{c(\mathbf{p})} \log \log \log \xi^{c(\mathbf{p})})^{1/2}\}, \quad (3.36)$$

donde $s(\mathbf{p}) = \dim \mu$ está definido en (3.1), y

$$c(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in M} p_i \log r_i \right)^{-1} < 0. \quad (3.37)$$

Observar que para $\alpha = 0$ se tiene $\phi_0 = \xi^{s(\mathbf{p})}$. La clase \mathcal{G}_H 'calibra a la izquierda' a la función de dimensión $\xi^{s(\mathbf{p})}$, en el siguiente sentido: se tiene para todo $\alpha \geq 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \log \xi^{s(\mathbf{p})} / \log \phi_\alpha(\xi) = 1,$$

pero

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi^{s(\mathbf{p})} / \phi_\alpha(\xi) = 0.$$

Esto último implica que

$$H^{\phi_\alpha} \geq H^{s(\mathbf{p})} \quad (3.38)$$

para todo $\alpha \geq 0$. La clase de funciones $\{H^t : t \geq 0\}$ se ordenan clásicamente de mayor a menor (i.e. H^0 a H^N , puesto que la familia decrece cuando t aumenta). Se

puede decir entonces arriba que H^{ϕ_α} 'refina a la izquierda' a la medida $H^{s(\mathbb{P})}$, y por extensión que la clase \mathcal{G}_H también refina a la izquierda a la función potencial $\xi^{s(\mathbb{P})}$.

Se define la clase de funciones de dimensión \mathcal{F}^+ como las $\psi \in \mathcal{F}$ tales que $\psi(x)\psi(y) \leq \psi(xy)$, para $x, y > 0$ que hagan que la expresión tenga sentido. Del mismo modo se dice que $\psi \in \mathcal{F}^-$ si $\psi(x)\psi(y) \geq \psi(xy)$. Se puede demostrar [Mor iii] que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{F}^- = \{\xi^t : t \geq 0\}$. El siguiente lema justifica que las funciones $\phi_\alpha \in \mathcal{G}_H$ están en la clase de funciones de dimensión definidas en (3.36), y recoge alguna propiedad que será necesaria ocasionalmente. También será necesario en el capítulo 4.

Lema 3.3.5 *Sea $t > 0$, $c < 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, y considerar la familia de funciones de variable real*

$$\phi_\alpha(x) = x^t \exp(\alpha f(x)), \quad (3.39)$$

con $f(x) = (2 \log x^c \log \log \log x^c)^{1/2}$. Entonces

i) $\phi_\alpha \in \mathcal{F}$.

ii) $\phi_\alpha \in \mathcal{F}^-$ para todo $\alpha \geq 0$, y $\phi_\alpha \in \mathcal{F}^+$ para todo $\alpha \leq 0$.

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi_\alpha(ax)}{\phi_\alpha(x)} = a^t > 0$, para todo $a > 0$

demostración:

Escribiremos ocasionalmente en la demostración $f(x) = h(\log x^c)$, donde

$$h(\xi) = (2\xi \log \log \xi)^{1/2}. \quad (3.40)$$

Observar que $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} h(\xi) = +\infty$, $h'(\xi) > 0$ si $\xi > e$, y

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} h'(\xi) = 0^+ \quad (3.41)$$

(esta notación indica que el límite 0 se alcanza desde valores positivos).

i) Es sencillo ver que ϕ_α es continua y positiva en un intervalo $(0, \delta_0)$ con $\delta_0 = \min\{1, e^{-e/c}\}$. A continuación comprobamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi_\alpha(x) = 0. \quad (3.42)$$

Escribiendo

$$\phi_\alpha(x) = \exp(t \log x + \alpha f(x)) = \exp(\log x(t + \frac{\alpha f(x)}{\log x})),$$

puesto que $t > 0$, y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\log x} = 0,$$

se tiene (3.42). Por último comprobamos que ϕ_α es creciente en algún intervalo de la forma $(0, \delta)$. Derivando se tiene

$$\phi'_\alpha(x) = x^{t-1} e^{\alpha f(x)} (t + \alpha x f'(x)). \quad (3.43)$$

Puesto que $c < 0$ y

$$f'(x) = \frac{c}{x} h'(\log x^c),$$

se tiene de (3.43) que $\phi'_\alpha(x) > 0$ para todo x (suficientemente pequeño) si $\alpha < 0$. En el caso $\alpha > 0$, se tiene de (3.41) que $t + \alpha x f'(x) = t + \alpha c h'(\log x^c)$ se hace positivo en un entorno del origen, y por tanto $\phi'_\alpha(x) > 0$ también en este caso. Por tanto ϕ_α es creciente en un entorno a la derecha de 0 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Observar que si se demuestra que

$$f(xy) \leq f(x) + f(y) \quad (3.44)$$

(con $x, y > 0$ en un entorno del origen suficientemente pequeño) se demuestran simultáneamente las dos afirmaciones de ii). La desigualdad (3.44) equivale a

$$h(\log x^c + \log y^c) \leq h(\log x^c) + h(\log y^c).$$

Por lo tanto, basta demostrar que la desigualdad

$$h(\xi + \eta) \leq h(\xi) + h(\eta) \quad (3.45)$$

se verifica para todo par de valores ξ y η suficientemente grandes. En primer lugar observar que

$$\xi h'(\xi) = \frac{\xi}{h(\xi)} \left(\frac{1}{\log \xi} + \log \log \xi \right),$$

de modo que la desigualdad

$$\xi h'(\xi) < h(\xi) \quad (3.46)$$

se tiene si ξ es suficientemente grande (de hecho es fácil ver que (3.46) se tiene para todo ξ tal que $(\log \xi)^{-1} < \log \log \xi$, por tanto al menos para $\xi > e^2$). Por otra parte, derivando dos veces en (3.40) y tras un poco de álgebra se obtiene

$$h''(\xi) = -(h(\xi)^3 \log^2(\xi))^{-1} (1 + 2 \log \log \xi + (\log \log \xi \log \xi)^2),$$

y por tanto $h''(\xi) < 0$ si $\xi > e$. A continuación demostramos (3.45). Suponer que $\xi < \eta$. Del teorema del valor medio existe $z \in [\eta, \xi + \eta]$ tal que

$$h(\xi + \eta) - h(\eta) = h'(z)\xi. \quad (3.47)$$

Puesto que $h'(z) \leq h'(\xi)$, usando la desigualdad (3.46), se obtiene de (3.47)

$$h(\xi + \eta) - h(\eta) \leq h'(\xi)\xi \leq h(\xi),$$

si ξ y η son suficientemente grandes (basta $e^2 < \xi, \eta$), y por tanto se tiene (3.45) y la propiedad ii).

iii) Puesto que

$$\frac{\phi_\alpha(ax)}{\phi_\alpha(x)} = a^t \exp(\alpha(f(ax) - f(x))),$$

y f es decreciente en un entorno de 0 se tiene de inmediato que

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \phi_\alpha(ax)/\phi_\alpha(x) \geq a^t$$

si $0 < a < 1$ y $\alpha > 0$, o bien si $a > 1$ y $\alpha < 0$. En el caso general se procede aplicando el teorema del valor medio. Suponer $a > 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, usando la regla de la cadena y que h' es decreciente

$$\begin{aligned} f(x) - f(ax) &\leq \max_{y \in [x, ax]} f'(y)(1-a)x \leq \\ &\leq \max_{y \in [x, ax]} h'(\log y^c) \frac{c}{a} (1-a) \leq \underline{h'(\log x^c) \frac{c(1-a)}{a}}. \end{aligned}$$

De (3.41) se tiene que $\lim_{y \rightarrow 0} h'(\log y^c) = 0$, y si $a > 0$ se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - f(ax)) = 0,$$

y por tanto se tiene iii) para $a > 1$ y α arbitrario. El caso $0 < a < 1$ se trata de igual manera, de modo que iii) es cierto para todo $a > 0$. En particular para $a = 2$, lo que implica que la medida de Hausdorff H^{ϕ_a} (usando recubrimientos con bolas) sea equivalente a la medida de Hausdorff definida con recubrimientos arbitrarios (ver (1.7)). \square

El siguiente lema será necesario en éste y el siguiente capítulo. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y sea $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}$ el conjunto de Besicovitch del espacio de códigos, i.e.

$$\mathcal{B}_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \delta_j(\mathbf{i}) = p_j\}. \quad (3.48)$$

Lema 3.3.6 Sea $c = c(\mathbf{p})$ como en (3.37), y sea la función

$$f_c(\xi) = (2 \log \xi^c \log \log \log \xi^c)^{1/2}. \quad (3.49)$$

Entonces, para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f_c(r_{\mathbf{i}(k)})}{(2k \log \log k)^{1/2}} = 1. \quad (3.50)$$

demostración:

Sea R la variable aleatoria en M definida por

$$R(i) = \log r_i, \quad i \in M. \quad (3.51)$$

Considerar el proceso de Bernouilli $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, donde se emplea la notación de (3.26).

Sea $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}$ como en la hipótesis del lema. Entonces, de la definición (3.48)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k^R(\mathbf{i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in M} \delta(i, k) \log r_i = \sum_{i \in M} p_i \log r_i = c^{-1}, \quad (3.52)$$

donde $c = c(\mathbf{p})$. Sea $0 < \varepsilon < -c^{-1}$. Observar que $S_k^R(\mathbf{i}) = \log r_{\mathbf{i}(k)}$, en la notación de (3.27). Por tanto, por (3.52), existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c^{-1} - \varepsilon < k^{-1} \log r_{\mathbf{i}(k)} < c^{-1} + \varepsilon,$$

para todo $k > k_1$. Equivalentemente

$$k(1 + c\varepsilon) < \log r_{i(k)}^c < k(1 - c\varepsilon) \quad (3.53)$$

se verifica para todo $k > k_1$. Tomar ahora k_2 suficientemente grande para que

$$\frac{\log \log(1 + c\varepsilon)k}{\log \log k} > 1 + c\varepsilon \quad (3.54)$$

$$\frac{\log \log(1 - c\varepsilon)k}{\log \log k} < 1 - c\varepsilon \quad (3.55)$$

se verifiquen para todo $k > k_2$. Si ahora se toma $k^* = \max\{k_1, k_2\}$ se tiene, para todo $k > k^*$ que

$$\left(\frac{(1 + c\varepsilon) \log \log(1 + c\varepsilon)k}{\log \log k} \right)^{1/2} < \frac{f_c(r_{i(k)})}{(2k \log \log k)^{1/2}} < \left(\frac{(1 - c\varepsilon) \log \log(1 - c\varepsilon)k}{\log \log k} \right)^{1/2}$$

usando (3.53), y por tanto

$$1 + c\varepsilon < \frac{f_c(r_{i(k)})}{(2k \log \log k)^{1/2}} < 1 - c\varepsilon$$

usando (3.54)-(3.55). De aquí se sigue el resultado. \square

Para demostrar el resultado central de la sección necesitaremos algo más de probabilidad que la ley fuerte de grandes números. En concreto, será necesaria la *ley del logaritmo iterado*. La siguiente versión será suficiente

Teorema (Ley del Logaritmo Iterado)

Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Suponer que $\mathcal{E}[X_i] = 0$ y que $\mathcal{E}[X_i^2] = \sigma^2 > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $S_n^X = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces, con μ -probabilidad uno, se tiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^X}{(2n \log \log n)^{1/2}} = \sigma \quad (3.56)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^X}{(2n \log \log n)^{1/2}} = -\sigma \quad (3.57)$$

Una demostración puede verse en [Bil 78]. La ley del logaritmo iterado, un teorema límite fuerte, es un resultado clásico en probabilidad. Su origen está asociado al intento de refinar las afirmaciones sobre números normales. Observar que la ley del logaritmo iterado en particular implica la ley fuerte de los grandes números. El primer resultado que se puede denominar como ley de logaritmo iterado se debe a Khintchine, que en el año 1924 demostró la versión del teorema para variables de Bernouilli. La versión más general (para variables i.i.d. no acotadas) es de Hartman y Wintner (1941).

Ahora estamos en disposición de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.3.7 *Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verificando condición de abierto, y sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Sea $\mathcal{G}_H = \{\phi_\alpha : \alpha \geq 0\}$ la familia de funciones definida en (3.36). Sea*

$$d(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in M} p_i (\log p_i - s(\mathbf{p}) \log r_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.58)$$

Entonces, para la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ asociada al par (Ψ, \mathbf{p}) se tiene

- i) $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a H^{ϕ_α} si y sólo si $\alpha < d(\mathbf{p})$.
- ii) $\mu_{\mathbf{p}}$ es continua respecto a H^{ϕ_α} si y sólo si $\alpha > d(\mathbf{p})$.
- iii) $\mu_{\mathbf{p}}$ tiene representación integral respecto a H^t para algún $t > 0$ si y sólo si $t = s$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s$.

demostración:

Aplicaremos el teorema 3.3.1 con la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ como la medida del teorema, la función ϕ_α como la función de dimensión, y la densidad superior $\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}$ jugando el papel de la función d . Denotamos la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ mediante μ . La \mathcal{C}_π -medibilidad de $\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}$ se demostró en la proposición 3.3.2, y del lema 3.3.5 se tiene que $\mathcal{G}_H \subset \mathcal{F}$. Por último, el teorema de densidad 3.2.3 proporciona las hipótesis del teorema 3.3.1. Por lo tanto, basta estudiar el comportamiento μ -a.e. de la densidad $\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}$. Para ello usaremos la ley del logaritmo iterado.

Sea X la variable aleatoria en M definida por

$$X(i) = \log p_i - s(\mathbf{p}) \log r_i \quad (3.59)$$

($X \equiv X^{(s(\mathbf{p}))}$ en la notación de (3.29)). Observar que $\mathcal{E}[X] = 0$ y que $\mathcal{E}[X^2] = d(\mathbf{p})^2$. Considerar el proceso de Bernouilli $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, donde X_j se define a partir de X según (3.26). Sea $\phi_\alpha \in \mathcal{G}_H$, y notar que ϕ_α se puede escribir como $\phi_\alpha(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})} \exp(\alpha f_c(\xi))$, donde la función f_c está definida en (3.49), y $c = c(\mathbf{p})$. Para cada $\alpha \geq 0$ la ϕ_α -densidad superior en un punto $x \in E \setminus \Theta^*$ puede escribirse como

$$\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^k p_{i_j}}{r_{i(k)}^{s(\mathbf{p})} \exp(\alpha f_c(r_{i(k)}))} = \exp\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} f_c(r_{i(k)}) \left(\frac{S_n^X(i)}{f_c(r_{i(k)})} - \alpha\right)\right\}, \quad (3.60)$$

donde $i = \pi^{-1}(x)$. Del lema 3.3.6 y la ley del logaritmo iterado (3.56) se tiene que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_n^X(i)}{f_c(r_{i(k)})} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_n^X(i)}{(2k \log \log k)^{1/2}} = d(\mathbf{p}),$$

para ν -casi todo $i \in M^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, como $\mu(E \setminus \Theta^*) = 1$ por el Θ -lema, se tiene de (3.60) que μ -a.e.

$$\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 \leq \alpha < d(\mathbf{p}) \\ 0 & \text{si } \alpha > d(\mathbf{p}) \end{cases}$$

puesto que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c(r_{i(k)}) = +\infty$. Ahora, las tesis (a) y (b) del teorema 3.3.1 demuestran las partes i) y ii) del teorema. Observar que, puesto que la familia $\{H^{\phi_\alpha} : \alpha \geq 0\}$ es no-creciente en α , la afirmación en i) para $\alpha < 0$ es obvia.

A continuación demostramos la parte iii). Considerar, para $t > 0$, la variable aleatoria $X^{(t)}$ definida en M como en (3.29), i.e. $X^{(t)}(i) = \log p_i - t \log r_i$, $i \in M$. Del teorema 3.3.1 basta encontrar los valores de t tales que

$$0 < \bar{d}_\mu^t(x) < +\infty \quad (3.61)$$

μ -a.e. Considerar el conjunto de μ -medida plena $E \setminus \Theta^*$, y observar que la t -densidad superior \bar{d}_μ^t se escribe en $x \in E \setminus \Theta^*$ como

$$\bar{d}_\mu^t(x) = \exp\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} S_k^{X^{(t)}}(\pi^{-1}(x))\right),$$

y por lo tanto (3.61) se verifica si y sólo si

$$-\infty < \limsup_{k \rightarrow \infty} S_k^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) < +\infty \quad (3.62)$$

ν -a.e. Puesto que la ley fuerte de los grandes números implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} S_k^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) = \mathcal{E}[X^{(t)}]$$

ν -a.e., la propiedad (3.62) se cumple si y sólo si

$$\mathcal{E}[X^{(t)}] = \sum_{i \in M} p_i (\log p_i - t \log r_i) = 0.$$

Esto es equivalente a que $t = s(\mathbf{p})$, puesto que si $\mathcal{E}[X^{(t)}] > 0$ entonces $\lim_k S_k^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) = +\infty$ ν -a.e. De la ley del logaritmo iterado se tiene

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (2k \log \log k)^{-1/2} S_k^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) = d(\mathbf{p}),$$

ν -a.e., y por tanto (3.62) se verifica si y sólo si $d(\mathbf{p}) = 0$. Pero esto sólo sucede para $\log p_i - s(\mathbf{p}) \log r_i = 0$ para cada $i \in M$, i.e. $p_i = r_i^{s(\mathbf{p})}$, $i \in M$, lo que sólo es posible si $s(\mathbf{p}) = s$ (de modo que $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$). Esto prueba la parte iii) del teorema, y la demostración de éste concluye. \square

Recogemos el comportamiento de la medida autosemejante respecto a la medida $H^{s(\mathbf{p})}$ en el siguiente corolario, que está de hecho ya demostrado en el teorema 3.3.7. Nótese que $\phi_0 = \xi^{s(\mathbf{p})}$.

Corolario 3.3.8 *Para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ asociada al par (Ψ, \mathbf{p}) es singular respecto a la medida de Hausdorff en su dimensión, $H^{s(\mathbf{p})}$.*

Nota 3.3.9 El corolario anterior afirma que toda la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ puede concentrarse en un conjunto de medida de Hausdorff $H^{s(\mathbf{p})}$ nula. La ley del logaritmo iterado permite de hecho caracterizar un conjunto con esta propiedad. Esto puede verse en el capítulo 5.

Por otra parte, el teorema 3.3.7 proporciona un criterio sencillo para decidir cuál de dos medidas autosemejantes dadas con igual dimensión se concentra en

un conjunto de medida de Hausdorff menor. Decimos que la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ está más concentrada que $\mu_{\mathbf{q}}$ si existe una medida de Hausdorff H^ϕ tal que $H^\phi(P) = 0$ para un conjunto P tal que $\mu_{\mathbf{p}}(P) = 1$, mientras que $H^\phi(Q) > 0$ para todo Q tal que $\mu_{\mathbf{q}}(Q) > 0$. Alternativamente $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a H^ϕ mientras que $\mu_{\mathbf{q}}$ es continua respecto a H^ϕ . Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{P}^+$ con $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ es claro que si $s(\mathbf{p}) < s(\mathbf{q})$ entonces $\mu_{\mathbf{p}}$ está más concentrada que $\mu_{\mathbf{q}}$. Sin embargo, este criterio no es válido cuando $s(\mathbf{p}) = s(\mathbf{q})$ para $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. Observar que este caso es plausible. El siguiente corolario proporciona un criterio válido en tal caso. En concreto, el parámetro discriminante que se debe escrutar es la desviación típica de las variables aleatorias $X^{s(\mathbf{p})}$ y $X^{s(\mathbf{q})}$.

Corolario 3.3.10 *Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{P}^+$ tales que $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ y $s(\mathbf{p}) = s(\mathbf{q})$. Entonces, si $d(\mathbf{p}) > d(\mathbf{q})$ la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ está concentrada en un conjunto con medida de Hausdorff menor que el conjunto en que se concentra la medida $\mu_{\mathbf{q}}$.*

demostración:

Es una aplicación directa del teorema 3.3.7. Tomar $\alpha > 0$ tal que $d(\mathbf{q}) < \alpha < d(\mathbf{p})$, entonces $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a la medida H^{ϕ_α} (y por tanto se concentra en un conjunto de medida H^{ϕ_α} -nula), mientras que $\mu_{\mathbf{q}}$ es continua respecto a la medida H^{ϕ_α} (y entonces la medida de cualquier conjunto de $\mu_{\mathbf{q}}$ -medida plena tiene también H^{ϕ_α} -medida positiva). \square

Capítulo 4

Geometría de Medidas Autosemejantes II: Dimensión de la Medida en el Caso Numerable y Continuidad respecto a la Medida Packing en el Caso Finito.

En este capítulo se abordan fundamentalmente dos cuestiones que no han quedado resueltas con la técnicas de los capítulos anteriores. La primera consiste en encontrar la dimensión de Hausdorff y la dimensión packing de la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, en el caso numerable, i.e. $M = \mathbb{N}$. En este capítulo se demuestra que la dimensión packing y Hausdorff de la medida autosemejante viene dada por el número real $s(\mathbf{p})$, lo que supone *regularidad dimensional* de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. La segunda, en el caso finito, consiste en intentar formular un teorema ‘dual’ al de la $H^{s(\mathbf{p})}$ -singularidad de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. Como $H^\phi \leq P^\phi$ para toda $\phi \in \mathcal{F}$, la medida autosemejante puede ser singular o continua respecto a la medida packing $P^{s(\mathbf{p})}$. Este segundo resulta ser el caso, lo que supone, una vez más, otra vuelta de tuerca en la dualidad entre medidas packing y medidas de Hausdorff.

4.1 Preliminares.

Las dificultades para abordar el cálculo de la dimensión en el caso numerable residen en el hecho de que ahora no hay un ratio de contracción mínimo en el sistema Ψ . Las demostraciones que se han conseguido para dimensión Hausdorff en los dos capítulos anteriores dependen de manera esencial del hecho de que existe un factor de contracción mínimo $u = \min\{r_i : i \in M\} > 0$. Esto no sucede en el caso infinito y, de hecho, es el responsable de que en general el compacto $S\Psi$ -invariante E no tenga H^s -medida positiva en este caso [Mor i] (para condiciones que garanticen medida positiva de E ver [Mor ii]). Por otra parte, como se emplean técnicas locales, una cota inferior para la dimensión requiere un modo de cubrir bolas con cilindros geométricos. Aunque Deliu y otros (1992) consiguen reducir el cálculo de la densidad logarítmica a una cuestión de ley de grandes números en el espacio de códigos, lo cierto es que su técnica no consigue relacionar una ‘densidad sobre bolas’ con una ‘densidad sobre cilindros geométricos’. Esta es una dificultad con la que se han encontrado diversos autores [CM 92] en el caso de sistemas de $\mathcal{S}(N, M)$ no-disjuntos, y tal técnica parece no existir en la literatura. En este capítulo, para resolver las cuestiones mencionadas se introduce una técnica, que hemos llamado de *bola viajera* (‘travelling ball’), que es capaz de cubrir bolas con cilindros al menos en μ -casi todo punto. Se pueden dar ejemplos donde se muestra que no es razonable esperar que esto puede conseguirse en todo punto.

Durante esta sección, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ó $M = \mathbb{N}$ indistintamente, $\Psi = \{\varphi_i : i \in M\}$ es un sistema compacto de semejanzas de $\mathcal{S}(N, M)$ verificando la OSC con abierto V (ver capítulo 1). Recordar que $F = \overline{V}$. El ratio de contraction de φ_i está dado por r_i , $i \in M$. La teoría de los autosemejantes generados por infinitas semejanzas puede verse en [Mor i].

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ un vector de probabilidad positivo en M . Suprimiremos por comodidad el subíndice \mathbf{p} de las medidas $\nu_{\mathbf{p}}$ y $\mu_{\mathbf{p}}$, cuando el vector \mathbf{p} esté fijado en los razonamientos. Del capítulo 2 (ver teorema 2.3.1) se sabe que el espacio de probabilidad $(E, \mathcal{C}_{\pi}, \mu)$ es isomorfo al espacio $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu)$ (mediante la proyección π). cilindros en $M^{\mathbb{N}}$ Más aún, si se define una aplicación $T : E \mapsto E$ tal que

$$T|_{E \setminus \emptyset^*} = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}, \quad (4.1)$$

donde τ es el shift de Bernouilli en $M^{\mathbb{N}}$, entonces T preserva la medida μ y es isomorfa a τ (en el sentido del capítulo 2). Fijamos una transformación T con la propiedad (4.1), que denominamos *shift* en E . De la invariancia de la ergodicidad, bajo isomorfismo de espacios de medida, se desprende que el sistema (E, T, μ) es ergódico. Como consecuencia del Θ -lemma, T es diferenciable μ -a.e.

En este contexto C.D. Cutler [Cut 90] demostró que las densidades logarítmicas esféricas son constantes μ -a.e., es decir, existen $\underline{\alpha}$ y $\bar{\alpha}$ no-negativos tales que

$$\underline{\alpha}_{\mu}(x) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = \underline{\alpha} \quad \mu - \text{a.e.}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\alpha}_{\mu}(x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = \bar{\alpha} \quad \mu - \text{a.e.} \quad (4.3)$$

Diremos que μ es *Hausdorff-exacta* en el primer caso, y *packing-exacta* en el segundo (Cutler llama a μ de *dimensión Hausdorff exacta* en el primer caso, y de *dimensión packing exacta* en el segundo). Diremos que μ es (*dimensionalmente*) *regular* si

$$\underline{\alpha}_{\mu}(x) = \bar{\alpha}_{\mu}(x) \quad \mu - \text{a.e.} \quad (4.4)$$

Cuando μ es dim-exacta y Dim-exacta se llama *exacta*. En general, μ puede ser exacta pero no ser regular (en [LM 85] se da un ejemplo de esta situación). Por otra parte, Cutler construyó un ejemplo [Cut 90] que demuestra que la ergodicidad no basta para asegurar que μ es exacta si es regular.

Como consecuencia del teorema de Young (ver la sección 3.1) se tiene que si μ es regular y exacta (con $\alpha_{\mu}(x) = \alpha$ μ -a.e.) entonces $\dim \mu = \alpha$. Esto se desprende también de resultados más finos de Cutler [Cut 90] en un contexto más general de espacios métricos. En concreto, Cutler probó que si μ es Hausdorff-exacta y verifica (4.2) entonces $\dim \mu = \underline{\alpha}$, y además probó la contrapartida para la dimensión packing, i.e. (4.3) implica $\text{Dim} \mu = \bar{\alpha}$. El resultado de Deliu y otros [DGS 92] implica por tanto que la medida autosemejante es regular y exacta en el caso finito y, por tanto, $\dim \mu = \text{Dim} \mu$. Una revisión del trabajo de Cutler puede consultarse en [Cut 91] o en [Haa]. Los comentarios de la sección 3.1 del capítulo anterior, que revisan brevemente las técnicas locales para el cálculo de las dimensiones y medidas Hausdorff y packing, también son aplicables aquí.

Nuestro objetivo es encontrar la dimensión de la medida μ en el caso numerable. Como consecuencia del resultado de Cutler tenemos que si $\mu \in \mathcal{M}^+$, entonces μ es exacta. El trabajo de Cutler reduce el nuestro por tanto a 1) probar que μ es regular, y 2) encontrar el valor común $\alpha = \bar{\alpha} = \underline{\alpha}$.

4.2 Dimensión de las medidas autosemejantes. Caso general.

El siguiente lema previo se aplicará en diversas ocasiones durante este capítulo.

Lema 4.2.1 *Sea $f(r)$ una función real definida en cierto intervalo $(0, r_0)$, y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que*

i) *Si para cada $0 < r < r_0$ existe un k verificando*

$$f(r) \leq a_k, \quad (4.5)$$

y $k \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow 0$, entonces $\limsup_{r \rightarrow 0} f(r) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$.

ii) *Alternativamente, si para cada $r > 0$ existe un k verificando*

$$f(r) \geq a_k, \quad (4.6)$$

entonces $\liminf_{r \rightarrow 0} f(r) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$.

demostración:

i) Sea $\xi > 0$. Sea $\bar{f} = \limsup_{r \rightarrow 0} f(r)$, y tomar $r_0 > 0$ tal que

$$\bar{f} - \xi < f(r_0). \quad (4.7)$$

Seleccionar entonces el entero $k_0 = k(r_0)$ que, en virtud de (4.5), verifica $f(r_0) < a_{k_0}$. Se tiene entonces de (4.7) que $\bar{f} - \xi < a_{k_0}$, y por tanto $\bar{f} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$.

ii) Sea $g(r) = -f(r)$, y $b_k = -a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De (4.6) se tiene que para todo $r > 0$ suficientemente pequeño existe un $k = k(r) \in \mathbb{N}$ tal que $g(r) \leq b_k$. De la parte i) se sigue que $\limsup_{r \rightarrow 0} g(r) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k$, y entonces

$$-\liminf_{r \rightarrow 0} f(r) = \limsup_{r \rightarrow 0} g(r) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k = -\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k,$$

de donde se sigue ii). \square

Sea el par (Ψ, \mathbf{p}) en las condiciones citadas. En el caso $M = \mathbb{N}$ es necesario que el cociente en (4.9) esté definido. Asumiremos en esta sección por tanto la convergencia de las series

$$\sum_{i \in M} p_i \log p_i < +\infty, \quad \sum_{i \in M} p_i \log r_i < +\infty \quad (4.8)$$

La primera serie (y por tanto la segunda) puede diverger (ver e.g. [Ren 70] para un ejemplo). Se define entonces

$$s(\mathbf{p}) := \frac{\sum_{i \in M} p_i \log p_i}{\sum_{i \in M} p_i \log r_i}. \quad (4.9)$$

Teorema 4.2.2 *Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, sea μ la medida autosemejante asociada a \mathbf{p} . Asumir la hipótesis (4.8). Para μ -casi todo $x \in E$ se tiene*

$$\bar{\alpha}_\mu(x) \leq s(\mathbf{p}). \quad (4.10)$$

demostración:

Considerar en M las variables aleatorias

$$Y(i) = \log p_i, \quad R(i) = \log r_i, \quad i \in M. \quad (4.11)$$

Considerar en $M^{\mathbb{N}}$ los procesos estocásticos de Bernouilli $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Como en el capítulo anterior se denota $Z_j = Z \circ \text{pr}_1 \circ \tau^j$, para $Z = Y, R$, y pr_1 es la proyección sobre la primera coordenada $M^{\mathbb{N}} \mapsto M$. Sea ν la medida producto en $M^{\mathbb{N}}$ asociada a \mathbf{p} . De la ley fuerte de los grandes números se sigue que para ν -casi todo código $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} S_k^Z(\mathbf{i}) = \mathcal{E}[Z] \quad (4.12)$$

donde para cada k , $S_k^Z(\mathbf{i}) = \sum_{j=1}^k Z_j(\mathbf{i})$, y $\mathcal{E}(\cdot)$ denota la esperanza de la v.a. Z respecto de \mathbf{p} . Observar que las variables Y y R tienen esperanza finita (ver (4.8)), y que $s(\mathbf{p}) = \mathcal{E}[Y]/\mathcal{E}[R]$.

Sea $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$ un código donde se cumple (4.12). Sea $\xi > 0$, y tomar un entero k_0 tal que

$$\max\{|k^{-1}S_k^Y(\mathbf{i}) - \mathcal{E}(Y)|, |k^{-1}S_k^R(\mathbf{i}) - \mathcal{E}(R)|, (k-1)^{-1}\} < \xi, \quad (4.13)$$

para todo $k > k_0$. Sea $0 < r < r_{\mathbf{i}(k_0)}/2$, y tomar $k_1 = \min\{k : F_{\mathbf{i}(k)} \subset B(\pi(\mathbf{i}), r)\}$. Puesto que $r_{\mathbf{i}(k_1)} < 2r$ se tiene que $k_1 > k_0$, usando (4.13) y que $r_{\mathbf{i}(k_1-1)} > r$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\log \mu(B(\pi(\mathbf{i}), r))}{\log r} &\leq \frac{\log \mu(F_{\mathbf{i}(k_1)})}{\log r_{\mathbf{i}(k_1-1)}} = \frac{\sum_{j=1}^{k_1} \log p_{i_j}}{\sum_{j=1}^{k_1-1} \log r_{i_j}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{k_1-1}\right) \frac{k_1^{-1}S_{k_1}^Y(\mathbf{i})}{(k_1-1)^{-1}S_{k_1-1}^R(\mathbf{i})} \leq (1+\xi) \frac{\mathcal{E}(Y) + \xi}{\mathcal{E}(R) - \xi}. \end{aligned}$$

Como $\xi > 0$ es arbitrario, del lema 4.2.1 y de la definición (4.9) se sigue que

$$\bar{\alpha}_\mu(\pi(\mathbf{i})) \leq s(\mathbf{p})$$

para un conjunto de $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$ ν -medida uno, y por tanto se tiene (4.10) para un conjunto de $x \in E$ de μ -medida uno. \square

A continuación obtenemos una cota inferior para la densidad logarítmica para μ -casi todo punto $x \in E$. Recuérdese que, para $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in M^k$, $A_{\mathbf{i}} = \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(A)$. Necesitaremos algunos lemas previos. En concreto, el lema que sigue es más de lo que será necesario.

Lema 4.2.3 *Sea M finito o numerable. Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ verificando condición de abierto. Para $k \in \mathbb{N}$, sea \mathcal{A}_k la clase de conjuntos $\{\emptyset, S\Psi^{k-1}(E_1), S\Psi^{k-1}(E_2), \dots\}$ ($S\Psi^0$ es la identidad), y sea $\sigma(\mathcal{A}_k)$ la σ -álgebra engendrada por \mathcal{A}_k . Entonces, para todo $p \in \mathbb{N}$*

$$\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_p) = \prod_{j=1}^p \mu(A_j), \quad (4.14)$$

donde $\mu \in \mathcal{M}^+$ es una medida autosemejante y $A_j \in \sigma(\mathcal{A}_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots, p$.

demostración:

Considerar la clase $\tilde{\mathcal{A}}_k$ formada por la clase de conjuntos en \mathcal{A}_k más todos los conjuntos que se obtienen como intersección finita de los conjuntos en la clase \mathcal{A}_k . La clase $\tilde{\mathcal{A}}_k$ es un π -sistema en la terminología de Billingsley (ver [Bil 78]), es decir $P \cap Q \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ para todo par $P, Q \in \tilde{\mathcal{A}}_k$.

Observar que, para todo $i = (i_1 i_2 \dots) \in M^{\mathbb{N}}$ se tiene

$$E_{i_1} \cap S\Psi(E_{i_2}) \cap S\Psi^2(E_{i_3}) \cap \dots = E_{i_1 i_2 i_3 \dots},$$

y por lo tanto

$$\mu(E_{i_1} \cap S\Psi(E_{i_2}) \cap S\Psi^2(E_{i_3}) \cap S\Psi^{p-1}(E_{i_p})) = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_p} = \prod_{j=1}^p \mu(E_{i_j}). \quad (4.15)$$

de modo que se tiene (4.14) para la clase de conjuntos de \mathcal{A}_k . De esto se sigue que

$$\mu(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_p}) = \prod_{j=1}^p \mu(P_{i_j}) \quad (4.16)$$

para toda p -upla de conjuntos tales que $P_{i_j} \in \tilde{\mathcal{A}}_j$ para $j = 1, \dots, p$. A continuación se justifica esta afirmación. Observar que dos conjuntos de la clase \mathcal{A}_k bien tienen intersección vacía, bien intersecan en un subconjunto del conjunto de solapamiento primario Θ^* . Para probar esta última afirmación suponer que la intersección no es vacía, y considerar $i, j \in M^k$ tales que $i(q) = j(q)$ pero $i_{q+1} \neq j_{q+1}$ para un $1 \leq q \leq k$, y sean $l, n \in M$ con $l \neq n$. Entonces,

$$\varphi_i(E_l) \cap \varphi_j(E_n) \subset \varphi_{i(q)}(\varphi_{i_{q+1}}(E) \cap \varphi_{j_{q+1}}(E)) \subset \varphi_{i(q)}(\Theta) \subset \Theta^*, \quad (4.17)$$

donde Θ es el conjunto de solapamiento primario definido en (1.17), y Θ^* está definido en (2.2). Del Θ -lema (ver sección 2.2) se tiene que Θ^* es un conjunto de μ -medida nula para toda medida autosemejante en \mathcal{M}^+ , y por tanto la intersección de dos conjuntos de la clase \mathcal{A}_k tiene μ -medida nula. Por tanto, si en la intersección $P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_p}$, se tiene que $P_{i_j} \in \tilde{\mathcal{A}}_j \setminus \mathcal{A}_j$ para algún j , la identidad (4.16) también se verifica (los dos miembros son nulos). De ello se sigue que (4.16) se verifica para toda p -upla de conjuntos $P_{i_j} \in \tilde{\mathcal{A}}_j$, $1 \leq j \leq p$. Equivalentemente, se dice que para todo $p \in \mathbb{N}$ las clases $\tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathcal{A}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{A}}_p$ son independientes (respecto a μ). Un resultado de Billingsley (teorema 4.2 en [Bil 78]) implica que las σ -álgebras

engendradas correspondientes $\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2), \dots, \sigma(\mathcal{A}_p)$ también son independientes, que es lo que afirma el lema. \square

Del trabajo de A. Schief [Sch 94] se sabe que basta la condición de abierto para asegurar la condición más fuerte de que $V \cap E \neq \emptyset$ (i.e. la *condición fuerte de abierto*). Por lo tanto, bajo condición de abierto existen $y \in E \cap V$, y $\varepsilon > 0$ tales que $B(y, \varepsilon) \subset V$. Sea $\rho > 0$ tal que

$$d(B(y, \varepsilon), \partial V) > \rho. \quad (4.18)$$

Elegir ahora

$$k_0 > \min\{k : \varphi_{i(k)}(V) \subset B(y, \varepsilon) \text{ para un } i \in M^{\mathbb{N}} \text{ con } \pi(i) = y\}, \quad (4.19)$$

de modo que

$$\varphi_{i(k_0)}(F) \subset B(y, \varepsilon). \quad (4.20)$$

Observar que el conjunto $E_{i(k_0)} \subset F_{i(k_0)}$ de (4.20) es un cilindro geométrico de primera generación para el sistema Ψ^{k_0} , donde

$$\Psi^k := \{\varphi_i : i \in M^k\}, \quad (4.21)$$

para $k \in \mathbb{N}$. A continuación se justifica que el conjunto autosemejante E se obtiene también como el único conjunto invariante asociado a la transformación de conjunto $S\Psi^k$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Bajo la hipótesis de que $\Psi \in \mathcal{S}(M, N)$ es compacto (esto siempre sucede en el caso finito), la transformación de conjunto $S\Psi = \bigcup_{i \in M} \varphi_i$ transforma compactos en compactos (ver e.g. [Mor i]). Además es una contracción de razón $U = \max\{r_i : i \in M\}$ en la métrica de Hausdorff. E el único compacto $S\Psi$ -invariante, i.e. $S\Psi(E) = E$. Sea $k \in \mathbb{N}$, y considerar el sistema $S\Psi^k$ definido en (4.21). Si $S\Psi^{ok}$ denota la composición

$$S\Psi^{ok} = S\Psi \circ S\Psi \circ \dots \circ S\Psi,$$

se tiene

$$S\Psi^{ok} = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_k} \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k} = \bigcup_{i \in M^k} \varphi_i, \quad (4.22)$$

y por tanto la transformación de conjunto

$$S\Psi^k := \bigcup_{i \in M^k} \varphi_i$$

también transforma compactos en compactos. Además es una contracción en la métrica de Hausdorff de razón U^k . Por lo tanto, el teorema del punto fijo garantiza que existe un único compacto $S\Psi^k$ -invariante. De (4.22) se sigue que dicho compacto es el $S\Psi$ -invariante E .

A continuación se justifica que la medida autosemejante μ_p asociada al par (Ψ, p) puede obtenerse a partir del sistema $S\Psi^k$ (k arbitrario en \mathbb{N}) con una elección adecuada de un vector de probabilidades en M^k . Sea el espacio

$$\mathcal{MB}(E) = \{\eta : \eta \text{ medida de Borel en } E, \eta(E) = 1\},$$

dotado de la métrica definida por

$$\text{dist}(\eta_1, \eta_2) = \sup\{\langle \eta_1, f \rangle - \langle \eta_2, f \rangle : f \in \text{Lip}(E)\},$$

donde $\langle \eta, f \rangle = \int_E f d\eta$, y $\text{Lip}(E)$ es la clase de funciones $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in E$. Se demuestra en [Bar 88] que $(\mathcal{MB}(E), \text{dist})$ es un espacio métrico completo.

Sea $p = (p_1, p_2, \dots) \in \mathcal{P}^+$. Considerar el operador de Hutchinson $\mathcal{MB}(E) \mapsto \mathcal{MB}(E)$ definido como

$$\mathcal{M}_{(\Psi, p)}\eta(A) = \sum_{i \in M} p_i \eta \circ \varphi_i^{-1}(A), \tag{4.23}$$

para todo A . La existencia de una única medida $\mathcal{M}_{(\Psi, p)}$ -invariante en el caso de M finito está probada en [Hut 81]. A continuación generalizamos sus ideas al caso numerable.

En primer lugar, la aplicación $\mathcal{M}_{(\Psi, p)}$ está bien definida: puesto que para cada $i \in M$ φ_i es continua la aplicación inversa φ_i^{-1} transforma borelianos en borelianos y entonces la medida $\eta \circ \varphi_i^{-1}$ está bien definida; además

$$\mathcal{M}_{(\Psi, p)}\eta(E) = \sum_{i \in M} p_i \eta(\varphi_i^{-1}(E)) = \sum_{i \in M} p_i \eta(E) = \sum_{i \in M} p_i = 1,$$

y por tanto $\mathcal{M}_{(\Psi, p)}\eta \in \mathcal{MB}(E)$. En segundo lugar demostramos que $\mathcal{M}_{(\Psi, p)}$ es una contracción. Observar que para todo $i \in M$

$$\langle \eta \circ \varphi_i^{-1}, f \rangle = \langle \eta, f \circ \varphi_i \rangle \tag{4.24}$$

(ver e.g. [Bar 88]). Sean $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{MB}(E)$ y $f \in \text{Lip}(E)$. Puesto que $U = \max\{r_i : i \in M\}$, y $f \in \text{Lip}(E)$

$$U^{-1} | f \circ \varphi_i(x) - f \circ \varphi_i(y) | \leq U^{-1} d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) \leq U^{-1} r_i \leq 1,$$

se tiene que $U^{-1} f \circ \varphi_i \in \text{Lip}(E)$, y usando (4.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta_1, f \rangle - \langle \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta_2, f \rangle &= \sum_{i \in M} p_i \langle \eta_1, f \circ \varphi_i \rangle - \sum_{i \in M} p_i \langle \eta_2, f \circ \varphi_i \rangle = \\ &= U \sum_{i \in M} p_i (\langle \eta_1, U^{-1} f \circ \varphi_i \rangle - \langle \eta_2, U^{-1} f \circ \varphi_i \rangle) \leq \sum_{i \in M} p_i U \text{dist}(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\text{dist}(\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta_1, \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta_2) \leq U \text{dist}(\eta_1, \eta_2),$$

y por tanto $\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})}$ es una contracción. El teorema del punto fijo asegura la existencia de una única medida $\tilde{\mu}$ tal que $\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \tilde{\mu} = \tilde{\mu}$.

En tercer lugar, se comprueba que la medida invariante $\tilde{\mu}$ obtenida en el párrafo anterior coincide con la medida autosemejante inducida por el vector \mathbf{p} . Definir, para cada $i \in M$, la aplicación en el espacio de códigos $\sigma_i : M^{\mathbb{N}} \mapsto M^{\mathbb{N}}$ mediante $\sigma_i(i) = ii$. Es claro que

$$\pi \circ \sigma_i = \varphi_i \circ \pi, \quad (4.25)$$

donde π es la proyección $M^{\mathbb{N}} \mapsto E$ definida en (1.14). Sea ν la medida producto $\prod_1^{\infty} p$. Observar que para A en la σ -álgebra \mathcal{C} de los cilindros, se tiene

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{i \in M} \sigma_i(\sigma_i^{-1}(A))\right) = \sum_{i \in M} \nu(\sigma_i(\sigma_i^{-1}(A))) = \sum_{i \in M} p_i \nu(\sigma_i^{-1}(A)), \quad (4.26)$$

puesto que la unión es disjunta y ν es la medida producto. Si se considera la medida autosemejante inducida por ν en E (recordar que $\mu = \nu \circ \pi^{-1}$), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \mu &= \sum_{i \in M} p_i \nu \circ \pi^{-1} \circ \varphi_i^{-1} = \\ &= \sum_{i \in M} p_i \nu \circ (\varphi_i \circ \pi)^{-1} = \sum_{i \in M} p_i \nu \circ (\pi \circ \sigma_i)^{-1} = \\ &= \sum_{i \in M} p_i \nu \circ \sigma_i^{-1} \circ \pi^{-1} = \nu \circ \pi^{-1} = \mu, \end{aligned}$$

como consecuencia de (4.25) y (4.26). Por lo tanto la medida μ es invariante por $\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})}$. Puesto que π es continua es medible-Borel, y por lo tanto los conjuntos de Borel son \mathcal{C}_π -medibles (recordar que ésta es la σ -álgebra inducida en E por la de los cilindros en $M^{\mathbb{N}}$). Así la medida μ es de Borel y por lo tanto $\mu = \tilde{\mu}$ por unicidad.

Por último, demostramos que la medida autosemejante μ se obtiene también del sistema Ψ^k con un vector de probabilidad adecuado. Sea $k \in \mathbb{N}$, sea \mathbf{p}^k la medida producto $\mathbf{p} \times \mathbf{p} \times \dots \times \mathbf{p}$, y considerar el sistema Ψ^k definido en (4.21). Considerar el operador de Hutchinson $\mathcal{MB}(E) \mapsto \mathcal{MB}(E)$ asociado al par (Ψ^k, \mathbf{p}^k) , i.e.

$$\mathcal{M}_{(\Psi^k, \mathbf{p}^k)} = \sum_{\mathbf{i} \in M^k} p_{\mathbf{i}} \eta \circ \varphi_{\mathbf{i}}^{-1},$$

donde $p_{\mathbf{i}} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$ para $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$. A continuación se prueba que $\mathcal{M}_{(\Psi^k, \mathbf{p}^k)} \mu = \mu$, de modo que μ es la única medida invariante también del operador $\mathcal{M}_{(\Psi^k, \mathbf{p}^k)}$. Observar que, para $\eta \in \mathcal{MB}(E)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(\Psi^2, \mathbf{p}^2)} \eta &= \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in M^2} p_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \eta \circ \varphi_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{i} \in M, \mathbf{j} \in M} p_{\mathbf{i}} p_{\mathbf{j}} \eta \circ \varphi_{\mathbf{i}} \circ \varphi_{\mathbf{j}} = \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in M} p_{\mathbf{i}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in M} p_{\mathbf{j}} \eta \circ \varphi_{\mathbf{j}} \right) \circ \varphi_{\mathbf{i}} = \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \circ \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta = (\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})} \eta)^2, \end{aligned}$$

de modo que recursivamente se tiene $\mathcal{M}_{(\Psi^k, \mathbf{p}^k)} = (\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})})^k$. Por lo tanto, si μ es invariante para $\mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})}$, lo es también para $\mathcal{M}_{(\Psi^k, \mathbf{p}^k)}$, $k \in \mathbb{N}$. La situación es por tanto la misma que se tiene para el conjunto E , es decir, una medida puede ser invariante para diferentes transformaciones de Hutchinson.

Si en particular se elige k_0 como en (4.19), y se considera el sistema Ψ^{k_0} y la probabilidad producto \mathbf{p}^{k_0} en M^{k_0} , se tiene el siguiente resultado como consecuencia de (4.18)–(4.20) y la teoría anterior.

Teorema 4.2.4 *Sea M finito o numerable, y sea E el autosemejante asociado al sistema $\Psi \in \mathcal{S}(M, N)$ verificando la condición de abierto con un abierto V . Sea μ la medida autosemejante asociada a $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Entonces, dado $\rho > 0$ suficientemente pequeño, existen $k_0 = k_0(\rho)$, un sistema de m^{k_0} semejanzas $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\varphi}_j\}_j$ y un vector de probabilidades positivo en $\mathbb{R}^{m^{k_0}}$ que ‘generan’ el par autosemejante (E, μ) , y tal*

que

$$d(B, \partial V) > \rho$$

para un cilindro B de primera generación del sistema $\tilde{\Psi}$, i.e. $B = \tilde{\varphi}_l(E)$ con $l \in M^{k_0}$.

La expresión 'generan' en el teorema debe entenderse como que el conjunto E y la medida μ se obtienen como puntos fijos del operador de conjunto $S\tilde{\Psi}$ y el operador de Hutchinson $\mathcal{M}_{(\tilde{\Psi}^{k_0}, \mathbf{p}^{k_0})}$, respectivamente.

Como consecuencia del teorema 4.2.4 puede suponerse sin pérdida de generalidad que existe $l \in M$ tal que el cilindro de primera etapa $B = \varphi_l(E)$ verifica

$$d(B, \partial V) > \rho \quad (4.27)$$

para un $\rho > 0$ dado suficientemente pequeño. Durante este capítulo llamaremos B al cilindro con la propiedad (4.27), y pondremos $A = E \setminus B$.

Sea T el shift en E definido en (4.1). Definimos en E la sucesión de variables aleatorias $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mediante $\chi_k(x) = 0$ si $x \in B$, y

$$\chi_k(x) = \max\{p : T^k(x) \in A \cap T^{-1}(A) \cap T^{-2}(A) \cap \dots \cap T^{-p}(A)\}, \quad (4.28)$$

para $x \notin B$. El siguiente lema será importante en lo que sigue.

Lema 4.2.5 *Sea $\mu \in \mathcal{M}^+$, y sea $\{\chi_k\}_k$ como arriba (4.28). Para todo $a > 0$ se tiene*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^a} \chi_k(x) = 0 \quad \mu - \text{a.e.} \quad (4.29)$$

demostración:

Sea $a > 0$, y sea el conjunto $S = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-a} \chi_k(x) = 0\}$. Basta demostrar que el conjunto complementario

$$S^c = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ x : k^{-a} \chi_k(x) > \frac{1}{m}, k - \text{infinitamente a menudo} \right\} \quad (4.30)$$

es un conjunto de μ -medida cero.

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Para $k, j \in \mathbb{N}$ sea

$$\begin{aligned} A_{k,j} &= \{x : T^k(x) \in A \cap T^{-1}(A) \cap \dots \cap T^{-j}(A)\} = \\ &= T^{-k}(A \cap T^{-1}(A) \cap \dots \cap T^{-j}(A)). \end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomar $p(k) = \min\{p \in \mathbb{N} : pm \geq k^a\}$. De (4.28) y la definición de $A_{k,j}$ tenemos

$$\mu(\{x : \chi_k(x) > \frac{k^a}{m}\}) \leq \mu(A_{k,p(k)}), \quad (4.31)$$

puesto que si $\chi_k(x) = q \geq p(k)$ entonces

$$T^k(x) \in A \cap T^{-1}(A) \cap T^{-2}(A) \cap \dots \cap T^{-q}(A) \subset A \cap T^{-1}(A) \cap T^{-2}(A) \cap \dots \cap T^{-p(k)}(A),$$

y por tanto $x \in A_{k,p(k)}$.

La T -invariancia de μ y el lema 4.2.3 implican que

$$\mu(A_{k,p(k)}) = \mu(A \cap T^{-1}(A) \cap T^{-2}(A) \cap \dots \cap T^{-p(k)}(A)) = \mu(A)^{p(k)},$$

puesto que $T^{-j}(A) = S\Psi^j(A)$, y $A \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ es una unión de cilindros de primera generación. De la definición de $p(k)$ obtenemos en (4.31)

$$\mu(\{x : \chi_k(x) > \frac{k^a}{m}\}) \leq (\mu(A)^{1/m})^{k^a}.$$

LLamando $0 < r = \mu(A)^{1/m} < 1$, se tiene entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x : \chi_k(x) > \frac{k^a}{m}\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{k^a \log r}. \quad (4.32)$$

Si se efectúa en (4.32) el cambio de variable $y = x^a |\log r|$, y se estima la suma por la integral, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\log r|k^a} &\leq |\log r|^{-1/a} \int_{|\log r|}^{+\infty} e^{-y} y^{1/a-1} dy \leq \\ &\leq |\log r|^{-1/a} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{1/a-1} dy = |\log r|^{-1/a} \Gamma(a^{-1}), \end{aligned}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la integral euleriana. Por tanto la serie en (4.32) converge para $a > 0$, y el primer lema de Borel–Cantelli concluye que el conjunto

$$\{x : k^{-a} \chi_k(x) > \frac{1}{m}, k \text{ — infinitamente a menudo}\}$$

es un conjunto de μ -medida nula. Esto implica que el conjunto S^c definido en (4.30) tiene μ -medida nula, y por tanto se tiene el resultado. \square

Teorema 4.2.6 ('Travelling–Ball' Lemma)

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y μ la medida autosemejante asociada, entonces μ -a.e.

$$s(\mathbf{p}) \leq \underline{\alpha}_\mu(x), \quad (4.33)$$

con $s(\mathbf{p})$ dado en (4.9).

demostración:

Sea $E = A \cup B$ la descomposición de E como arriba, i.e. con $B = \varphi_i(E)$ verificando (4.27). Sea $\mathcal{B}_\mathbf{p}^{(\infty)}$ el conjunto de Besicovitch fino del espacio de códigos asociado a \mathbf{p} (ver la definición en (2.28)). Sea $x = \pi(i) \in B_\mathbf{p}^{(\infty)}$. Esto permite tener, gracias al Θ -lema, un sólo código i antemagen de x por π . Tomar $q = \min\{j : i_j = l\}$, que está bien definido puesto que $i \in \mathcal{B}_\mathbf{p}^{(\infty)}$. Sea $r > 0$ tal que $r < \rho r_{i(q)}$, y considerar el entero

$$k_r = \max\{k : r < \rho r_{i(k)}\}. \quad (4.34)$$

Considerar la bola ('viajera') $B(T^{k_r}(x), \rho)$, que verifica

$$\varphi_{i(k_r)}(B(T^{k_r}(x), \rho)) = B(x, \rho r_{i(k_r)}) \supset B(x, r), \quad (4.35)$$

dada la elección de k_r (4.34) y que $\varphi_{i(k_r)}(T^{k_r}(x)) = x$.

Suponer ahora por un momento que se tiene

$$B(T^{k_r}(x), \rho) \subset V. \quad (4.36)$$

A continuación se muestra cómo se debería proceder para obtener el resultado. De (4.35) se tiene

$$B(x, r) \subset \varphi_{i(k_r)}(V) \subset F_{i(k_r)},$$

y por tanto $\mu(B(x, r)) \leq \mu(F_{i(k_r)})$; como $\rho r_{i(k_r+1)} < r$, se tiene

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \frac{\log \mu(F_{i(k_r)})}{\log(\rho r_{i(k_r+1)})}. \quad (4.37)$$

Usando las variables Y y R como en la prueba del teorema 4.2.2 la desigualdad (4.37) se escribe

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \frac{k_r}{k_r + 1} \frac{k_r^{-1} S_{k_r}^Y(\mathbf{i})}{(k_r + 1)^{-1} (S_{k_r+1}^R(\mathbf{i}) + \log \rho)}. \quad (4.38)$$

Observar que

$$s(\mathbf{p}) = \mathcal{E}[Y]/\mathcal{E}[R]. \quad (4.39)$$

Haciendo r tender a cero, aplicando como en (4.12) la ley fuerte de los grandes números a las sucesiones $\{Y_j\}_j$ y $\{R_j\}_j$, y usando el lema 4.2.1 se tiene que

$$\underline{\alpha}_\mu(\pi(\mathbf{i})) \geq s(\mathbf{p}),$$

para un conjunto de códigos que es intersección de conjuntos de $M^{\mathbf{N}}$ de ν -medida uno, y por lo tanto se tiene (4.33) μ -a.e.

Como $\liminf_{k \rightarrow \infty} d(T^k(\pi(\mathbf{i})), \partial V) = 0$ para $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, hay valores de k_r tales que $B(T^{k_r}(x), \rho) \not\subset V$, y por tanto la hipótesis (4.36) no es plausible, y se debe conseguir un razonamiento válido en general. Esto se hace a continuación.

Suponer que la bola viajera $B(T^{k_r}(x), \rho)$ no está contenida en V . En este caso, tomar

$$p_r = p(k_r, x) = \min\{j : T^{k_r-j}(x) \in B\}. \quad (4.40)$$

Observar que si $p_r = 0$ se está en la hipótesis de (4.36), de modo que se cubre también el caso (4.36). Con esta elección, $B(T^{k_r-p_r}(x), \rho) \subset V$ como consecuencia de la propiedad del cilindro B (4.27). Teniendo en cuenta que $\varphi_{i(k_r-p_r)} T^{k_r-p_r}(x) = x$ (observar que $\mathbf{i} = \pi^{-1}(x)$ está unívocamente determinado para x), y que $r_{i(k_r-p_r)} \rho > r$, se tiene

$$B(x, r) \subset B(x, r_{i(k_r-p_r)} \rho) \subset \varphi_{i(k_r-p_r)} \left(B(T^{k_r-p_r}(x), \rho) \right) \subset F_{i(k_r-p_r)},$$

y entonces, procediendo como en el caso de (4.36)

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \frac{\log F_{i(k_r-p_r)}}{\log(\rho r_{i(k_r+1)})}, \quad (4.41)$$

que se escribe, igual que allí, como

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \left(1 - \frac{p_r + 1}{k_r + 1}\right) \frac{(k_r - p_r)^{-1} S_{k_r - p_r}^Y(i)}{(k_r + 1)^{-1} (S_{k_r + 1}^R(i) + \log \rho)}. \quad (4.42)$$

Llamamos $\{b_r\}_r$ a la sucesión de términos

$$b_r = \left(1 - \frac{p_r + 1}{k_r + 1}\right) \frac{(k_r - p_r)^{-1} S_{k_r - p_r}^Y(i)}{(k_r + 1)^{-1} (S_{k_r + 1}^R(i) + \log \rho)}. \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (4.42), basta demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} b_r = s(\mathbf{p}) \quad \nu\text{-a.e.} \quad (4.44)$$

Veamos que esto es suficiente. Suponer (4.44) cierto. De (4.44) se tiene que para cada $r > 0$ existe b_r tal que

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq b_r.$$

El mismo razonamiento del lema 4.2.1 prueba entonces que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \lim_{r \rightarrow 0} b_r = s(\mathbf{p}),$$

lo que concluye la demostración de teorema.

Por tanto basta probar (4.44). Para ello, dados k_r y $p_r = p(k_r)$ como arriba para cada $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, y teniendo en cuenta (4.43), basta probar que

$$\mu\{x : \lim_{r \rightarrow 0} p_r/k_r = 0\} = 1, \quad (4.45)$$

como consecuencia de la ley fuerte de grandes números. Considerar $\chi_{k_r - p_r + 1}$, donde χ_k es la variable aleatoria definida en (4.28). Por la elección de p_r , se tiene que $T^{k_r - p_r}(x) \in B$ (el caso $p_r = 0$ es el que $B(T^{k_r}(x), \rho) \subset V$), y entonces $\chi_{k_r - p_r + 1}(x) \geq p_r - 1$. Por tanto

$$\frac{\chi_{k_r - p_r + 1}(x)}{k_r - p_r + 1} \geq \frac{\chi_{k_r - p_r + 1}(x)}{k_r} \geq \frac{p_r - 1}{k_r},$$

con lo que basta probar que μ -a.e $x \in E$

$$\lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{\chi_{k_r - p_r + 1}(x)}{k_r} = 0. \quad (4.46)$$

Observar que, para $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, $k_r - p_r \rightarrow \infty$ cuando $k_r \rightarrow \infty$ (i.e. $r \rightarrow 0$). Probemos esta afirmación. Suponer lo contrario, esto es $\lim_{r \rightarrow 0} k_r - p_r = p^* < +\infty$. Entonces para todo $r > 0$ menor que un r_0 adecuado se tiene que $k_r - p_r < p^* + 1$. Por tanto, para todo $r > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $T^{k_r - p_r}(x) \in B$ y $T^j(x) \notin B$ para todo j con $p^* + 1 \leq j \leq k_r$. La frecuencia $\delta_l(\mathbf{i}, k)$ se puede escribir como

$$\delta_l(\mathbf{i}, k) = k^{-1} \text{card}\{j : T^j(x) \in B, 1 \leq j \leq k\},$$

puesto que $B = E_l$. Entonces, para todo $r_0 > r > 0$ se tiene

$$\delta_l(\pi^{-1}(x), k_r) = k_r^{-1} \text{card}\{j : T^j(x) \in B, 1 \leq j \leq k_r\} \leq k_r^{-1} p^* \quad (4.47)$$

puesto que $T^j(x) \notin B$ para $p^* + 1 \leq j \leq k_r$. Como r es arbitrario y $k_r \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow 0$, se tiene en (4.47) que $\delta_l(\pi^{-1}(x)) = 0$, lo que contradice que $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$. Por tanto $\lim_{r \rightarrow 0} k_r - p_r = +\infty$.

El lema 4.2.5 con $a = 1$ demuestra entonces que

$$\lim_{k_r - p_r \rightarrow \infty} \frac{1}{k_r - p_r} \chi_{k_r - p_r}(x) = 0,$$

y por tanto se tiene (4.46), con lo que la prueba concluye. \square

Ahora está probado el resultado central de esta sección.

Corolario 4.2.7 *Sea M finito o numerable. Toda medida $\mu_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}^+$ autosemejante es regular, y además*

$$\dim \mu_{\mathbf{p}} = \text{Dim} \mu_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}),$$

donde $s(\mathbf{p})$ está dado en (4.9).

demostración:

Los teoremas 4.2.2 y 4.2.6 implican que μ es regular y Hausdorff y packing exacta. Del trabajo de Cutler [Cut 90] se sigue entonces el resultado. \square

4.3 Continuidad de las medidas autosemejantes respecto de la medida packing en el caso finito.

En esta sección se persigue un resultado dual al obtenido en el capítulo 3 para las medidas de Hausdorff. Allí se demuestra que la medida μ es singular respecto a la medida de Hausdorff $H^{\dim\mu}$. Como $H^{\dim\mu} \leq P^{\dim\mu}$, se tiene la posibilidad de que μ sea también singular o continua respecto a la medida packing $P^{\dim\mu}$ en su dimensión. Este segundo resulta ser el caso. Procederemos como en el capítulo 3, pero como en la sección anterior será necesario usar una técnica de 'travelling ball'.

Sea $M = \{1, 2, \dots, m\}$ en esta sección. Dada una medida autosemejante $\mu \in \mathcal{M}^+$, y una función de dimensión $\psi \in \mathcal{F}$, definimos la siguiente ψ -densidad inferior cilíndrica (no-logarítmica) de μ en el punto $x \in E$

$$\underline{d}_\mu^\psi(x) = \sup\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{i(k)})}{\psi(r_{i(k)})} : i \in \pi^{-1}(x)\}. \quad (4.48)$$

Cuando $\psi(\xi) = \xi^t$ escribiremos $\underline{d}_\mu^t(\cdot)$. De nuevo, la densidad $\underline{d}_\mu^\psi(\cdot)$ tiene la ventaja de estar definida directamente en el espacio geométrico. Como veremos después, se puede conectar además con la geometría local sobre bolas.

Recordar que la ψ -densidad inferior esférica clásica está definida mediante

$$\underline{\theta}_\mu^\psi(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\psi(2r)}. \quad (4.49)$$

Recordar que se definió la clase de funciones de dimensión \mathcal{F}^+ como las $\psi \in \mathcal{F}$ tales que $\psi(x)\psi(y) \leq \psi(xy)$, para $x, y > 0$ que hagan que la expresión tenga sentido. Del mismo modo se dice que $\psi \in \mathcal{F}^-$ si $\psi(x)\psi(y) \geq \psi(xy)$. Se puede demostrar [Mor iii] que $\mathcal{F}^+ \cap \mathcal{F}^- = \{\xi^t : t \geq 0\}$. El siguiente lema, aunque se usará después para nuestro caso particular, tiene interés en general por sí mismo. Recordar que $u = \min_{i \in M} r_i$.

Lema 4.3.1 Sea $p \in \mathcal{P}^+$, y μ la medida autosemejante asociada a p . Para toda $\psi \in \mathcal{F}^+$, se tiene

$$\psi(u/2)\underline{d}_\mu^\psi(x) \leq \underline{\theta}_\mu^\psi(x). \quad (4.50)$$

para cada $x \in E$.

demostración:

Sea $x \in E$ y $r > 0$. Tomar un $i \in \pi^{-1}(x)$, y $k_0 = \min\{j : r_{i(j)} < r\}$. Entonces $B(x, r) \supset F_{i(k_0)}$ y $r_{i(k_0-1)} > r$. Por lo tanto

$$\frac{\mu(B(x, r))}{\psi(2r)} \geq \psi\left(\frac{u}{2}\right) \frac{\mu(F_{i(k_0)})}{\psi(r_{i(k_0)})},$$

puesto que $r_{i(k_0)} = r_{i(k_0-1)}r_{i k_0} \geq ur$ y $\psi \in \mathcal{F}^+$. Si r tiende a cero se tiene como consecuencia del lema 4.2.1

$$\underline{\theta}_\mu^\psi(x) \geq \psi\left(\frac{u}{2}\right) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{i(k)})}{\psi(r_{i(k)})}$$

para cada $i \in \pi^{-1}(x)$. Puesto que para todo $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{i(k)})}{\psi(r_{i(k)})} > \underline{d}_\mu^\psi(x) - \varepsilon$$

para algún $i \in \pi^{-1}(x)$ se tiene que

$$\underline{\theta}_\mu^\psi(x) > \psi(u/2)(\underline{d}_\mu^\psi(x) - \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se sigue el resultado. \square

Nota 4.3.2 Obsérvese que el teorema anterior también es cierto para la función de dimensión ψ verificando $\liminf_{r \rightarrow 0} (\psi(ur))/\psi(2r) = \psi_* > 0$. De este modo tendríamos en lugar de (4.50) la desigualdad $\underline{\theta}_\mu^\psi(x) \geq \psi_* \underline{d}_\mu^\psi(x)$. El lema 4.3.1 bastará para nuestro caso. Si la función ψ no está definida en $\xi = u/2$ basta con prolongarla de manera no-decreciente y continua hasta éste valor, o bien considerar el sistema de semejanzas Ψ^k con k suficientemente grande de modo que $\psi(u^k)$ esté definido (puesto que la medida μ es también invariante para el operador de Hutchinson asociado a Ψ^k , y por tanto la densidad \underline{d}_μ^ψ se puede computar también a partir del sistema Ψ^k). Observar que lo que es relevante es el comportamiento de $\psi(\xi)$ para ξ arbitrariamente cercanos a 0.

Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ y $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Sea $\mathcal{G}_P = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ la familia uniparamétrica de funciones reales dada por

$$\psi_\alpha(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})} \exp\{-\alpha(2 \log \xi^{c(\mathbf{p})} \log \log \log \xi^{c(\mathbf{p})})^{1/2}\}, \quad (4.51)$$

donde $s(\mathbf{p})$ está dado en (4.9), y

$$c(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in M} p_i \log r_i\right)^{-1} \quad (4.52)$$

como en el capítulo 3. Nótese que $\psi_\alpha(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})} \exp(-\alpha f_{c(\mathbf{p})}(\xi))$ en la notación del capítulo 3 (ver (3.36)).

Observar que el siguiente lema se demostró en el capítulo 3 (ver lema 3.3.5)).

Lema 4.3.3 *Para todo $\alpha \geq 0$, $\psi_\alpha \in \mathcal{F}^+$.*

Teorema 4.3.4 (‘Travelling-Ball’ Lemma (no-logarítmico))

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y μ la medida autosemejante asociada. Para $\alpha \geq 0$, se tiene μ -a.e.

$$\underline{\theta}_\mu^{\psi_\alpha}(x) \leq (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} \underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x), \quad (4.53)$$

donde $\rho > 0$ es una constante que depende sólo del sistema Ψ (ver (4.27)).

demostración:

Sea $E = A \cup B$ la descomposición de E como en la sección anterior, esto es $B = \varphi_l(E)$ para algún $l \in M$, verificando $d(B, \partial V) > \rho$ (ver (4.27)). La demostración se basa en la técnica de ‘bola viajera’ empleada en la demostración del teorema 4.2.6. Sin embargo, como se explica a continuación, es necesario un punto de vista ‘dual’ de la idea en ese teorema.

Sea $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{B}_P^{(\infty)}$, y $x = \pi(\mathbf{i})$. Observar que $\mathbf{i} = \pi^{-1}(x)$. Dado que ahora se necesita obtener una desigualdad para los límites inferiores, no puede procederse

como en la demostración del teorema 4.2.6, puesto que el hecho de que para cada $r > 0$ se tenga un k tal que

$$\mu(B(x, r))/\psi_\alpha(2r) \leq C\mu(F_{i(k)})/\psi_\alpha(r_{i(k)}) \quad (4.54)$$

para alguna constante $C > 0$, no basta para asegurar que los límites inferiores respetan la desigualdad en (4.54). Sin embargo, la técnica de ‘bola viajera’ permite obtener el resultado. Para ello, se procederá encontrando, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, un radio $r_k > 0$ tal que se verifica una desigualdad del tipo (4.54). De ello sí se deduce que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(B(x, r_k))/\psi_\alpha(2r_k) \leq C \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(F_{i(k)})/\psi_\alpha(r_{i(k)}),$$

y si se toma el límite inferior en el término de la izquierda sobre los $r > 0$ se tiene

$$\underline{\theta}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \mu(B(x, r))/\psi_\alpha(2r) \leq C \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(F_{i(k)})/\psi_\alpha(r_{i(k)}).$$

Sea $q = \min\{j : i_j = l\}$, y considerar un $k \geq q$. Ahora tomar un $r_k > 0$ de modo que $r_k < \rho r_{i(k)}$ pero $r_k \geq \rho r_{i(k+1)}$. Si se considera la bola $B(T^k(x), \rho)$, se tiene

$$\varphi_{i(k)}(B(T^k(x), \rho)) = B(x, \rho r_{i(k)}) \supset B(x, r_k) \quad (4.55)$$

puesto que $\varphi_{i(k)}(T^k(x)) = x$ ($i = \pi^{-1}(x)$) está unívocamente definido).

Suponer por un momento que la bola ‘viajera’ está contenida en el abierto V , i.e.

$$B(T^k(x), \rho) \subset V.$$

Por tanto se tiene $\varphi_{i(k)}(B(T^k(x), \rho)) \subset \varphi_{i(k)}(\overline{V}) = F_{i(k)}$, y entonces de (4.55)

$$B(x, r_k) \subset B(x, \rho r_{i(k)}) \subset F_{i(k)}.$$

De ello se sigue

$$\mu(B(x, r_k)) \leq \mu(F_{i(k)}). \quad (4.56)$$

Además, puesto que $\rho r_{i(k+1)} < r_k$ se tiene

$$\rho r_{i(k)} \leq \rho r_{i(k+1)} r_{i(k)} = \rho r_{i(k+1)} < r_k,$$

y como $\psi_\alpha \in \mathcal{F}^+$

$$\psi_\alpha(2\rho u)\psi_\alpha(r_{i(k)}) \leq \psi_\alpha(2r_k). \quad (4.57)$$

De (4.56) y (4.57) se obtiene

$$\frac{\mu(B(x, r_k))}{\psi_\alpha(2r_k)} \leq (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} \frac{\mu(F_{i(k)})}{\psi_\alpha(r_{i(k)})}. \quad (4.58)$$

Tomando límites inferiores y aplicando el lema 4.2.1 se tendría el resultado. Sin embargo, la hipótesis de que la bola viajera está completamente contenida en V en general no es plausible.

A continuación abordamos por tanto el caso general, i.e. la bola 'viajera' no está contenida en el abierto V ,

$$B(T^k(x), \rho) \not\subset V.$$

Entonces se considera el entero

$$p = p(k, i) = \min\{j : T^{k-j}(x) \in B\}. \quad (4.59)$$

Como $k \geq q$, y $T^q(x) \in B$ por la elección de q , se tiene que $p < k - q$, de modo que $p \geq 0$ está bien definido. Ahora, si se considera la bola $B(T^{k-p}(x), \rho)$ se tiene como en (4.55) que

$$\varphi_{i(k-p)}(B(T^{k-p}(x), \rho)) = B(x, \rho r_{i(k-p)}) \supset B(x, r_k),$$

ya que $r_k < \rho r_{i(k)} < \rho r_{i(k-p)}$.

Como $T^{k-p}(x) \in B$, $d(T^{k-p}(x), \partial V) > \rho$, de manera que la bola viajera $B(T^{k-p}(x), \rho)$ está contenida en el abierto V . Esto, como antes, implica que

$$F_{i(k-p)} \supset \varphi_{i(k-p)}(B(T^{k-p}(x), \rho)) \supset B(x, r_k), \quad (4.60)$$

así que la bola $B(x, r_k)$ no tiene porqué estar ahora contenida en el cilindro $F_{i(k)}$ sino en general en uno mayor. Sin embargo, de (4.60) se tiene

$$C(k)\mu(F_{i(k)}) = \mu(F_{i(k-p)}) \geq \mu(B(x, r_k)), \quad (4.61)$$

donde

$$C(k) = (p_{i_{k-p+1}} p_{i_{k-p+2}} \cdots p_{i_k})^{-1}.$$

Ahora de (4.57) y (4.61) obtenemos la desigualdad

$$\frac{\mu(B(x, r_k))}{\psi_\alpha(2r_k)} \leq (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} C(k) \frac{\mu(F_{\mathbf{i}(k)})}{\psi_\alpha(r_{\mathbf{i}(k)})}, \quad (4.62)$$

que es del tipo (4.54) pero con C dependiendo de k .

En vista de (4.62) basta probar que μ -a.e.

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{\mathbf{i}(k)})}{\psi_\alpha(r_{\mathbf{i}(k)})} = \liminf_{k \rightarrow \infty} C(k) \frac{\mu(F_{\mathbf{i}(k)})}{\psi_\alpha(r_{\mathbf{i}(k)})}. \quad (4.63)$$

Escribiendo la función de dimensión como $\psi_\alpha(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})} \exp(\alpha f_c(\xi))$, y tomando logaritmo y exponencial en el miembro derecho de (4.63) éste se puede escribir como

$$\exp(\liminf_k \{f_c(r_{\mathbf{i}(k+1)}) \left(\frac{S_{k+1}^X(\mathbf{i})}{f_c(r_{\mathbf{i}(k+1)})} + \alpha - \frac{\sum_{j=k-p+1}^{k+1} \log p_{i_j}}{f_c(r_{\mathbf{i}(k+1)})} \right)\}),$$

donde X es la variable aleatoria definida en (3.59) (observar que $X = Y + s(\mathbf{p})R$ con las variables aleatorias Y y R empleadas en la demostración del teorema 4.2.2), y f_c es la función definida en (3.59). Teniendo en cuenta el lema 3.3.6, basta probar que, si $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\sum_{j=k-p+1}^{k+1} \log p_{i_j}}{(2k \log \log k)^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (4.64)$$

μ -a.e. Recordando que $Y(i) = \log p_i$, $i \in M$ (ver (4.11)), la expresión en (4.64) se puede reescribir como la suma

$$\frac{S_p^Y(\tau^{k-p+1}(\mathbf{i})) - p\mathcal{E}[Y]}{(2p \log \log p)^{1/2}} \left(\frac{p \log \log p}{k \log \log k} \right)^{1/2} + \frac{p\mathcal{E}[Y]}{(2k \log \log k)^{1/2}}. \quad (4.65)$$

Ahora razonando como en la demostración del teorema 4.2.6 el segundo factor del primer sumando en (4.65) tiene límite cero μ -a.e. cuando $k \rightarrow \infty$ (usando el lema 4.2.5 con $a = 1$). Si se usa el lema 4.2.5 con $a = 1/2$, el mismo razonamiento prueba que el segundo sumando en (4.65) converge a 0 μ -a.e. Por lo tanto el primer sumando converge a 0 si $k \rightarrow \infty$, puesto que el otro factor está acotado ($k \rightarrow \infty$) μ -a.e (si $p \rightarrow \infty$ está garantizado por la ley del logaritmo iterado aplicado a la sucesión $\{Y_p\}_p$). Por tanto la expresión en (4.64) converge a cero, y se tiene por lo tanto la igualdad (4.63) μ -a.e. Tomando límites inferiores en (4.62) se tiene de (4.63) que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(x, r_k))}{\psi_\alpha(2r_k)} \leq (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(F_{\mathbf{i}(k)})}{\psi_\alpha(r_{\mathbf{i}(k)})} \quad (4.66)$$

μ -a.e. (recordar que el conjunto $B_{\mathbb{P}}^{(\infty)}$ tiene μ -medida uno). Puesto que la densidad $\underline{\theta}_{\mu}^{\psi_{\alpha}}(x)$ es menor o igual que el miembro izquierdo de la desigualdad (4.66) se tiene que (4.53) se verifica para un conjunto de μ -medida uno, y la prueba concluye. \square

Nota 4.3.5 Se puede demostrar que el teorema 4.3.4 es cierto para $\psi \in \mathcal{F}$ verificando $\liminf_{r \rightarrow 0} \psi(2br)/\psi(r) = \psi_{*}(b) > 0$ para todo $b > 0$ suficientemente pequeño. Se demostró en el lema 3.3.5 que la familia $\mathcal{G}_{\mathbb{P}}$ verifica esta condición con $b > 0$ arbitrario.

El teorema 3.3.1 sobre clasificación de medidas en \mathbb{R}^N respecto a medidas de Hausdorff que se usó en el capítulo 3 puede formularse en los mismos términos que allí para la medida packing.

Teorema 4.3.6 (Extensión del teorema de Rogers–Taylor (medidas Packing))

Sea μ una medida en \mathbb{R}^N con σ -álgebra \mathcal{A} , y sea $\psi \in \mathcal{F}$. Suponer que existen una función $d = d(\mu, \psi) : \mathbb{R}^N \mapsto [0, +\infty]$ \mathcal{A} -medible, y una constante $C > 0$ tales que

- (i) Si $d(x) < a$ para todo $x \in A$, entonces $aCP^{\psi}(A) \geq \mu(A)$ para $A \in \mathcal{A}$,
- (ii) Si $d(x) > b$ para todo $x \in A$, entonces $P^{\psi}(A) \leq Cb^{-1}$.

Entonces

- (a) μ es singular respecto a P^{ψ} si y sólo si $d(x) = +\infty$ μ -a.e.
- (b) μ es continua respecto a P^{ψ} si y sólo $d(x) < +\infty$ μ -a.e.
- (c) μ tiene una representación integral en términos de P^{ψ} si y sólo si $0 < d(x) < +\infty$.

La demostración en este caso es la misma que en el caso de la medida Hausdorff, puesto que la medida packing y la medida Hausdorff comparten idénticas

propiedades, en particular ambas son medidas exteriores. En el teorema original de Rogers–Taylor los conjuntos $\{x : d(x) < K\}$, $K \in \mathbb{R}$, necesitan ser borelianos porque estos autores consideran medidas de Borel. Sin embargo, el teorema sigue siendo cierto si los conjuntos $\{x : d(x) < K\}$ son μ -medibles. Aún cuando las medidas autosemejantes que consideramos son de Borel, nótese que la σ -álgebra \mathcal{C}_π puede ser mucho más amplia que la de Borel.

S.J. Taylor y C. Tricot probaron en 1985 un teorema de densidad para la medida packing que proporciona las hipótesis (i) y (ii) del teorema 4.3.6 si se toma como función de punto d la densidad inferior $\underline{\theta}_\mu^\psi$.

Teorema (Taylor–Tricot, 1985)

Sea μ una medida de Borel de probabilidad en \mathbb{R}^N . Sea $\psi \in \mathcal{F}$, y $A \in \mathbb{R}^N$.

- i) Si $\underline{\theta}_\mu^\psi(x) < a$ para todo $x \in A$, entonces $\mu(A) \leq aP^\psi(A)$.
- ii) Si $\underline{\theta}_\mu^\psi(x) > b$ para todo $x \in A$, entonces $P^\psi(A) \leq b^{-1}$.

Usando la medida de Hausdorff centrada (comparable a la medida de Hausdorff), Taylor y Tricot [TT 85] demostraron un teorema completamente paralelo al de arriba para densidades superiores y medidas de Hausdorff centradas. El teorema de arriba, en combinación con los teoremas 4.3.1 y 4.3.4 jugará el mismo papel que el teorema de densidad 3.2.3 desempeñó en el capítulo 3.

Ahora tenemos todos los elementos para demostrar el resultado central de esta sección. Sea $d(\mathbf{p})$ como en el capítulo anterior, esto es

$$d(\mathbf{p}) = \left(\sum_{i \in M} (\log p_i - s(\mathbf{p}) \log r_i)^2 p_i \right)^{1/2}. \quad (4.67)$$

Teorema 4.3.7 *Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Sea \mathcal{G}_P la familia definida en (4.51), y sea $d(\mathbf{p}) > 0$ el número real definido en (4.67). Entonces, para la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ inducida por \mathbf{p} , se tiene*

- i) $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a P^{ψ_α} si y sólo si $\alpha > d(\mathbf{p})$.

ii) $\mu_{\mathbf{p}}$ es continua respecto a P^{ψ_α} si y sólo si $0 \leq \alpha < d(\mathbf{p})$.

iii) $\mu_{\mathbf{p}}$ tiene representación integral respecto a P^t para algún $t > 0$ si y sólo si $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s$, y por tanto $s = t$.

demostración:

Considerar $\mu_{\mathbf{p}}$, $\psi_\alpha \in \mathcal{G}_P$, y $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}$ jugando el papel de μ , ψ , y d respectivamente en el enunciado del teorema de Rogers–Taylor 4.3.6. Es necesario demostrar que la función de punto $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}$ es \mathcal{C}_π -medible. Recordar que ésta es la σ -álgebra en E inducida por la de los cilindros en $M^{\mathbf{N}}$, \mathcal{C} . El razonamiento para justificar la medibilidad de dicha función es completamente paralelo al empleado en la demostración de la proposición 3.3.2 para demostrar la medibilidad de la densidad superior \bar{d}_μ^ϕ : sólo se debe cambiar el límite superior de las funciones \mathcal{C}_π -medibles $f_k(i)$ del lema 3.3.2 (que es \mathcal{C}_π -medible) por el límite inferior de éstas (que también es \mathcal{C}_π -medible).

En primer lugar probamos las partes i) y ii). Es claro que el teorema 4.3.1 junto con la parte ii) en el teorema de Taylor–Tricot proporcionan la hipótesis (ii) en el teorema 4.3.6 para ψ_α y $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}$ con una constante C dada por

$$C = (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} \quad (4.68)$$

(recordar que, como $|V| = 1$ entonces $\rho < 1$). Es decir se tiene la desigualdad

$$\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) > b,$$

para todo $x \in A$, con $A \in \mathcal{C}_\pi$ -medible, y para algún $b > 0$. Esta desigualdad implica por el teorema 4.3.1 y la parte ii) del teorema de Taylor–Tricot que

$$P^{\psi_\alpha}(A) \leq b^{-1}(\psi(2u))^{-1}.$$

Y por tanto

$$P^{\psi_\alpha}(A) \leq b^{-1}(\psi(2\rho u))^{-1}, \quad (4.69)$$

puesto que ψ_α es creciente y $\rho < 1$.

Del mismo modo, la hipótesis (ii) en el teorema 4.3.6 está garantizada por el teorema 4.3.4 y la parte i) en el teorema de Taylor–Tricot. Sin embargo, en este

caso se debe hacer un razonamiento suplementario, puesto que el teorema 4.3.4 sólo es cierto para μ -casi todo x . Sea un medible $A \in \mathcal{C}_\pi$ como en la hipótesis (i) del teorema 4.3.6, i.e. $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) < a$ para todo $x \in A$. Definir

$$A^* = \{x \in A : \underline{\theta}_\mu^{\psi_\alpha}(x) \leq (\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} \underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x)\}.$$

Del teorema 4.3.4 se tiene que $\mu(A) = \mu(A^*)$. Se aplica a A^* el teorema de Taylor-Tricot (parte i)) y se tiene que

$$\mu(A) = \mu(A^*) \leq a(\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} P^{\psi_\alpha}(A^*) \leq a(\psi_\alpha(2\rho u))^{-1} P^{\psi_\alpha}(A). \quad (4.70)$$

Por lo tanto (4.69) y (4.70) implican que las hipótesis (i) y (ii) del teorema de Rogers y Taylor se cumplen para la función $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}$ con la constante C dada por (4.68).

Sea $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_\mathbf{p}^{(\infty)}$, $x = \pi(\mathbf{i})$, y $\alpha \geq 0$. La ψ_α -densidad inferior en x se puede escribir como

$$\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = \exp \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\log \mu(F_{\mathbf{i}(k)}) - s(\mathbf{p}) \log r_{\mathbf{i}(k)} + \alpha f_c(r_{\mathbf{i}(k)}) \right) \right),$$

donde f_c está definida en (3.49) y $c = c(\mathbf{p})$ está dada en (3.37). Introduciendo en M la variable aleatoria $X = Y + s(\mathbf{p})R$ como en (3.59), donde Y, R son las variables definidas en (4.11) y la notación es la que allí se usa, se tiene que la densidad $\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x)$ se puede escribir como

$$\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = \exp \left(\liminf_k \left\{ f_c(r_{\mathbf{i}(k)}) \left(\frac{S_k^X(\mathbf{i})}{(2k \log k \log k)^{1/2}} \frac{(2k \log k \log k)^{1/2}}{f_c(r_{\mathbf{i}(k)})} + \alpha \right) \right\} \right). \quad (4.71)$$

Puesto que $d(\mathbf{p})$ definido en (4.67) es la desviación típica de la variable centrada X , i.e.

$$d(\mathbf{p}) = (\mathcal{E}[X^2])^{1/2},$$

de la ley del logaritmo iterado se sigue que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \{(2k \log k \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i})\} = -d(\mathbf{p}) \quad (4.72)$$

ν -a.e. $\mathbf{i} \in \mathcal{B}_\mathbf{p}^{(infy)}$. Teniendo en cuenta (4.72), y el lema 3.3.6 del capítulo 3 obtenemos en (4.71) que

$$\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = +\infty \text{ si y sólo si } \alpha > d(\mathbf{p}),$$

y que

$$\underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = 0 \text{ si y sólo si } 0 \leq \alpha < d(\mathbf{p}).$$

Ahora de las tesis (a) y (b) en el teorema de Rogers y Taylor con $d = \underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}$ se siguen las partes i) y ii) del teorema 4.3.7.

A continuación se demuestra la parte iii) del teorema. Para ello es necesario probar que el teorema 4.3.4 se verifica también para la clase de funciones $\{\psi(\xi) = \xi^t : t \geq 0\}$. Sea $t \geq 0$ y $x \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$. Se procede como en la demostración del teorema 4.3.4. La prueba del teorema hasta (4.63) no depende de la forma especial de la función de dimensión. El caso $\psi(\xi) = \xi^t$ se trata entonces de igual manera que allí hasta (4.63). La densidad inferior \underline{d}_μ^t en $x = \pi(\mathbf{i})$ tal que $\mathbf{i} \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ se puede escribir ahora como

$$\underline{d}_\mu^t(x) = \exp(\liminf_k \{(k+1) \left(\frac{1}{k+1} S_{k+1}^{X^{(t)}}(\mathbf{i}) - \frac{1}{k+1} \sum_{j=k+p-1}^{k+1} \log p_{i_j}(\mathbf{i}) \right)\}), \quad (4.73)$$

donde $X^{(t)} = Y + tR$, y las variables Y, R están definidas en (4.11). Entonces basta demostrar que μ -a.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=k+p-1}^{k+1} \log p_{i_j}(\mathbf{i}) = 0. \quad (4.74)$$

Pero (4.74) es inmediato de (4.55), y por tanto el teorema 4.3.4 también es cierto para la clase de funciones potenciales, i.e. se tiene

$$\underline{\theta}_\mu^t(x) \leq (2\rho u)^{-t} \underline{d}_\mu^t(x) \quad \mu\text{-a.e.} \quad (4.75)$$

Es claro que el argumento que condujo arriba a (4.70) es independiente de la función de dimensión considerada; como consecuencia de ello y de (4.75) la hipótesis (i) en el teorema Rogers-Taylor 4.3.6 se tiene también para la clase $\psi(\xi) = \xi^t$. La hipótesis (ii) de Rogers-Taylor se tiene directamente del teorema 4.3.1. Por lo tanto la afirmación sobre la representación integral en la parte iii) del teorema se tiene si y sólo si

$$0 < \underline{d}_\mu^t(x) < +\infty \quad \mu\text{-a.e.} \quad (4.76)$$

Puesto que para $x \in E \setminus \Theta^*$, el conjunto $\pi^{-1}(x)$ está formado por un único elemento se tiene

$$\underline{d}_\mu^t(x) = \exp(\liminf_k S_k^{X^{(t)}}(\pi^{-1}(x))),$$

de modo que (4.76) se verifica si y sólo si .

$$-\infty < \liminf_k \left(k \left(\frac{1}{k} S_k^{X^{(t)}}(\pi^{-1}(x)) \right) \right) < +\infty \quad \nu\text{-a.e.}, \quad (4.77)$$

y

$$-\infty < \liminf_k \left((2k \log \log k)^{1/2} \frac{S_k^{X^{(t)}}(\pi^{-1}(x))}{(2k \log \log k)^{1/2}} \right) < +\infty. \quad \nu - \text{a.e.} \quad (4.78)$$

porque el conjunto $E \setminus \Theta^*$ tiene μ -medida plena. Puesto que de la ley fuerte de grandes números

$$\lim_k k^{-1} S_k^{X^{(t)}}(i) = \mathcal{E}[X^{(t)}]$$

ν -a.e., la acotación (4.77) se cumple si y sólo si $\mathcal{E}[X^{(t)}] = 0$. Esto equivale a $t = s(\mathbf{p})$. Por otra parte, la ley del logaritmo iterado aplicado a la sucesión $\{S_k^{X^{(t)}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ implica que ν -a.e.

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (2k \log \log k)^{-1/2} S_k^{X^{(t)}}(i) = -d(\mathbf{p}),$$

y entonces (4.78) es cierto si y sólo si $d(\mathbf{p}) = 0$. Esto es equivalente a $p_i = r_i^{s(\mathbf{p})}$, $i \in M$. Pero tal elección de $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ sólo es posible si $s(\mathbf{p}) = s$, es decir

$$p_i = r^s$$

para $i \in M$, lo que demuestra iii) y concluye por tanto la demostración del teorema. \square

Destacamos en el siguiente corolario el caso $\alpha = 0$ obtenido en el teorema 4.3.7, que es 'dual' al demostrado en el capítulo 3 para la dimensión Hausdorff.

Corolario 4.3.8 *Para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ es continua respecto a la medida packing en su dimensión $P^{s(\mathbf{p})}$.*

Nota 4.3.9 Observar que el teorema 4.3.7 demuestra en particular que $\text{Dim} \mu_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p})$, precisando el modo en que la densidad logarítmica esférica existe y toma el valor $s(\mathbf{p})$. Esto completa la demostración del teorema 3.3.3 en el capítulo 3. Si la definición para conjunto 'fractal' propuesta por S.J. Taylor [Tay 86], i.e. A es 'fractal' si $\text{Dim} A = \dim A$, se considera también para las medidas, entonces las

medidas autosemejantes estudiadas en este capítulo deben considerarse típicamente como ‘medidas fractales’. No obstante, en el caso finito, el diferente comportamiento de estas medidas respecto a la medida de Hausdorff y la medida packing podrían estar relacionadas, siempre siguiendo la referencia de la teoría desarrollada para conjuntos [ST 88], con propiedades no ‘agradables’ de rectificabilidad.

Nota 4.3.10 La familia $\{\psi_\alpha\}_{\alpha>0}$ proporciona un *refinamiento a la derecha* de la función de dimensión $\psi_0(\xi) = \xi^{s(\mathbf{p})}$ diferente al que se obtuvo para la dimensión Hausdorff. En cada caso el refinamiento que se obtiene es el adecuado para obtener resultados sobre la medida. Ahora la familia está ordenada mediante: $0 < \alpha < \beta$ implica que $\psi_0 \geq \psi_\alpha \geq \psi_\beta$, y por tanto $P^{s(\mathbf{p})} \geq P^\alpha \geq P^\beta$. Ahora si $s(\mathbf{p}) = s(\mathbf{q})$ con $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, entonces la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ está concentrada en un conjunto de medida packing más pequeño si $d(\mathbf{p}) > d(\mathbf{q})$. Este es el mismo criterio que se obtuvo del lema 3.3.10, usando medidas de Hausdorff. La situación es simétrica a la que se tenía con la familia de medidas Hausdorff $\{\phi_\alpha\}_{\alpha>0}$.

En realidad, se puede considerar una única familia α -paramétrica $\mathcal{G} = \mathcal{G}_H \cup \mathcal{G}_P$ con el parámetro α barriendo \mathbb{R} . Notar que $\psi_\alpha = \phi_{-\alpha}$ (recordar la definición de ϕ_α en 3.36). Si se tiene en cuenta que $H^{\phi_\alpha} \leq P^{\phi_\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se pueden recoger los resultados de los capítulos 3 y 4 concernientes a la singularidad de medidas autosemejantes respecto de la familia de medidas de Hausdorff y packing asociadas a la familia $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ en un único teorema. Este se enuncia como sigue.

Teorema 4.3.11 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$ y sea la familia $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(\mathbf{p}) = \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, donde ϕ_α es la función definida en (3.36). Entonces, para la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$ inducida por \mathbf{p} , se tiene*

- i) $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a P^{ϕ_α} si y sólo si $\alpha < -d(\mathbf{p})$.
- ii) $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a H^{ψ_α} y continua respecto a P^{ϕ_α} si y sólo si $|\alpha| < d(\mathbf{p})$.
- iii) $\mu_{\mathbf{p}}$ es continua respecto a H^{ϕ_α} si y sólo si $\alpha > d(\mathbf{p})$.

iv) $\mu_{\mathbf{p}}$ no tiene representación integral respecto a la medida H^t o respecto a la medida P^t para ningún $0 < t < s$.

v) $\mu_{\mathbf{p}_s}$ es la única medida autosemejante que tiene representación respecto a H^s y P^s . De hecho, en este caso las tres medidas coinciden salvo en un factor constante.

Nota 4.3.12 En relación al punto v) del teorema anterior, D. Spear [Spe 92] ha demostrado recientemente que $H^s = KP^s$ para una constante K apropiada que sólo depende del sistema Ψ (de hecho $K = H^s(E)/P^s(E)$).

Capítulo 5

Geometría de Conjuntos Autosemejantes: Análisis Frecuencial en Conjuntos Autosemejantes. Los Conjuntos de Besicovitch.

En este capítulo desplazamos el punto de vista desde las medidas autosemejantes (que han ocupado la atención durante los tres capítulos anteriores) a subconjuntos relevantes de E que son capaces de concentrar toda la masa de la medida. En realidad, tales conjuntos han aparecido discretamente pero esencialmente en las argumentaciones de los resultados obtenidos previamente, lo que no hace sino reforzar la idea de 'dualidad' entre tales medidas y conjuntos para describir la geometría autosemejante. Tales conjuntos se definen en términos frecuenciales en el espacio de códigos, y abren la puerta a un análisis del fenómeno de la semejanza más rico del que se adopta tradicionalmente en la literatura, i.e. restringido al compacto E . Tales conjuntos frecuenciales no-compactos, que se estudian en la sección 5.2, podrían denominarse con toda legitimidad autosemejantes. De hecho, los conjuntos de Besicovitch están conectados directamente con problemas clásicos que se han considerado en teoría de números, probabilidad, y teoría geométrica de la medida. Esto se revisa con cierto detalle en la introducción. La tercera sección analiza propiedades

de dimensión de algunos conjuntos caracterizados frecuentemente.

5.1 Preliminares y Antecedentes.

Una de nuestras motivaciones para la investigación que se presenta en este capítulo fue originalmente el problema de la caracterización de los puntos ‘típicos’ en un conjunto autosemejante. Tal idea de ‘tipicidad’ debería entenderse respecto a cierta medida de probabilidad. Puesto que la atención recae ahora sobre el conjunto autosemejante, que tiene H^s -medida finita y positiva, la medida probabilizada $\mu_s = (H^s(E))^{-1}H^s$ puede considerarse como la medida adecuada respecto a la que se debe decidir la tipicidad de los puntos de E . Más en concreto, la pregunta puede formularse como sigue: cómo se puede caracterizar un punto de E que tiene probabilidad uno de ser escogido al azar con respecto a la probabilidad μ_s ?

En 1909 E. Borel proporcionó una respuesta para la pregunta formulada arriba para los puntos del intervalo unidad $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ cuando demostró que casi todos (con respecto a la medida de Lebesgue L^1) los números en I son *normales*, en particular tienen idéntica frecuencia asintótica de ceros y unos en su expansión binaria. La ley fuerte de los grandes números permite una formulación más general. Sea un entero $m > 1$ y $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Para cada $x \in I$ y $j \in M$ sea $\delta_j(x)$ la frecuencia asintótica del dígito j en la expansión en base m de x (considerar la infinita cuando haya dos disponibles). El conjunto de números *normales* en base m está dado por

$$N_m = \{x \in I : \delta_j(x) = m^{-1}, j \in M\}. \quad (5.1)$$

La ley fuerte de los grandes números prueba que $L^1(N_m) = L^1(I) = 1$, lo que muestra que los puntos del conjunto N_m se pueden considerar como los puntos ‘típicos’ del intervalo. Puesto que el intervalo unidad es un conjunto autosemejante, la cuestión formulada arriba sobre la tipicidad de los puntos en un autosemejante puede resolverse extendiendo la idea de normalidad de Borel a estos conjuntos. Esto se hace preciso más adelante.

Por otra parte, los conjuntos formados por ‘puntos no-normales’ de I , i.e. los que

hemos llamado *conjuntos de Besicovitch–Eggleston*

$$\Lambda_m(p_0, p_1, \dots, p_{m-1}) = \{x \in I : \delta_j(x) = p_j, j \in M\}, \quad (5.2)$$

con al menos un $p_i \neq m^{-1}$, pueden considerarse como los puntos normales con respecto a la medida de probabilidad (autosemejante) $\mu_{\mathbf{p}} = \nu_{\mathbf{p}}$ o π_m^{-1} con $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{m-1})$, y $\pi_m^{-1}(x) = (a_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es la aplicación $I \mapsto M^{\mathbb{N}}$ que a cada x le hace corresponder la sucesión formada por los dígitos de la expansión m -aria infinita de x , i.e. $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(x)m^{-k}$. La idea de que hay una medida de probabilidad privilegiada debe abandonarse si ésta no resulta ser la medida Lebesgue, que es la única que tiene sentido físico. A.S. Besicovitch en 1934 consideró el problema de la “medida de tales conjuntos de puntos atípicos para la medida de Lebesgue” y obtuvo una respuesta “en términos de dimensión fraccionaria”. Besicovitch probó que $\dim \Lambda_2(p, 1-p) = -\log_2(p^p(1-p)^{1-p})$, lo que cuantifica la ‘rareza’ de los puntos de $\Lambda_2(p, 1-p)$ en términos de la frecuencia asintótica p . H.G. Eggleston generalizó en 1949 la fórmula de Besicovitch para $m > 2$, i.e. Eggleston demostró que

$$\dim \Lambda_m(p_0, p_1, \dots, p_{m-1}) = \frac{\sum_{i \in M} p_i \log p_i}{-\log m}. \quad (5.3)$$

Observar que $\Lambda_m(m^{-1}, m^{-1}, \dots, m^{-1}) = N_m$ y que en tal caso la fórmula (5.3) es consecuencia de la ley de grandes números, pues el conjunto N_m tiene medida de Lebesgue 1, y por tanto dimensión 1.

P. Billingsley extendió en 1961 los conjuntos de Besicovitch–Eggleston a un ambiente de espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ donde tiene lugar un proceso estocástico $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados finito $M = \{1, 2, \dots, m\}$, o numerable. Billingsley introdujo el concepto de dimensión de Hausdorff asociado a la medida y al proceso (ver (5.40) para una definición), y extendió la fórmula de dimensión (5.3) a conjuntos definidos mediante las frecuencias asintóticas de transiciones entre estados cuando el proceso $\{x_k\}_k$ es una cadena de Markov regular. Cuando el espacio de probabilidad es el intervalo I con la medida de Lebesgue (y la σ -álgebra de Borel), y el proceso es de Bernoulli los resultados de Billingsley son los de Besicovitch y Eggleston.

Sea E_{Ψ} el conjunto autosemejante asociado a un sistema de semejanzas $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$ que verifica la condición de abierto. Según se probó en el teorema 2.3.1,

los espacios de probabilidad $(E_\Psi, \mathcal{C}_\pi, \mu_{\mathbf{p}})$ son isomorfos al espacio de probabilidad $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu_{\mathbf{p}})$ con isomorfismo dado por la proyección $\pi : M^{\mathbb{N}} \mapsto E$ definida en (1.14). Por lo tanto, los IFS con probabilidades de M. Barnsley [Bar 88] (que no son otra cosa que los espacios de probabilidad $(E, \mathcal{C}_\pi, \mu_{\mathbf{p}})$) se pueden considerar como proyecciones geométricas en \mathbb{R}^N del caso independiente de Billingsley.

Introducimos en este capítulo una extensión natural de los conjuntos de Besicovitch–Eggleston al contexto de conjuntos autosemejantes, sustituyendo la ‘codificación’ de los puntos mediante su expansión en base m por la codificación que de modo natural proporciona la proyección π . A tales conjuntos los hemos llamado genéricamente *conjuntos de Besicovitch*. Alternativamente, se pueden considerar los conjuntos de Besicovitch que hemos introducido como proyecciones de los conjuntos que Billingsley considera en el caso independiente. Sin embargo, el problema de encontrar las propiedades de dimensión y medida (Hausdorff y packing) de los conjuntos de Besicovitch de E_Ψ no es en modo alguno trivial. Obsérvese que el isomorfismo de espacios de medida $(E_\Psi, \mu_{\mathbf{p}}) \stackrel{\pi}{\cong} (M^{\mathbb{N}}, \nu_{\mathbf{p}})$ es cierto para todo sistema Ψ verificando condición de abierto, y por tanto no arroja ninguna información sobre la geometría de los conjuntos de Besicovitch. Dicha geometría está generada por la aplicación π , esto es, por el sistema Ψ , que finalmente es el responsable de distribuir la masa de la medida $\nu_{\mathbf{p}}$ en \mathbb{R}^N .

En este capítulo encontramos la dimensión Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch asociados a probabilidades $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Encontramos que la dimensión está dada por $s(\mathbf{p})$ definido por la fórmula (3.1), extendiendo por lo tanto la fórmula (5.3) de Besicovitch y Eggleston. También demostramos que la dimensión packing de los conjuntos de Besicovitch es $s(\mathbf{p})$, lo cual convierte a estos conjuntos en *fractales* según la definición de S.J. Taylor [Tay 86]. También se encuentran las dimensiones de los *conjuntos finos de Besicovitch* del espacio geométrico (ver (5.9) para la definición) que se han usado repetidamente en anteriores capítulos. Se obtiene además un conjunto de puntos *normales* de E como extensión natural de los números normales (en base m) de Borel en el intervalo.

La cuestión más fina de la medida de los conjuntos de Besicovitch (finos o no) en su dimensión también se aborda. Demostramos que tienen medida packing infinito en su dimensión, y resultados parciales sobre su medida de Hausdorff. En particular,

de nuestro trabajo se desprende que los conjuntos de Besicovitch–Eggleston tienen medida packing infinita y medida de Hausdorff nula o infinita en su dimensión, dada por (5.3).

Otros conjuntos definidos frecuentemente que son relevantes desde el punto de vista de la medida autosemejante (i.e. concentran toda la masa) o de la geometría (tienen medida de Hausdorff nula o la dimensión de la medida) también se presentan en este capítulo.

5.2 Conjuntos autosemejantes no–compactos de μ –medida plena. Los conjuntos de Besicovitch.

Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, M)$, con $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ó $M = \mathbb{N}$. Para $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots) \in M^{\mathbb{N}}$ y $j \in M$, sea

$$\delta_j(\mathbf{i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_j(\mathbf{i}, k), \tag{5.4}$$

donde para $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_j(\mathbf{i}, k) = k^{-1} \text{card}\{n : i_n = j, 1 \leq n \leq k\}. \tag{5.5}$$

Para cada $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$, se define el *conjunto de Besicovitch de Ψ asociado al vector \mathbf{p}* como el subconjunto de E

$$B_{\mathbf{p}} = \{\pi(\mathbf{i}) : \delta_j(\mathbf{i}) = p_j \text{ para todo } j \in M\}. \tag{5.6}$$

Observar que el conjunto $B_{\mathbf{p}}$ puede escribirse como

$$B_{\mathbf{p}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq N} \bigcap_{j \in M} \{\pi(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}, p_j - \frac{1}{n} < \delta_j(\mathbf{i}, k) < p_j + \frac{1}{n}\}.$$

El conjunto entre llaves en ésta expresión es una unión finita de cilindros E_j , $j \in M^*$, y por lo tanto es un conjunto cerrado. Esto demuestra que los conjuntos de Besicovitch son conjuntos $F_{\sigma\delta}$, y por tanto conjuntos de Borel. Recogemos en el siguiente lema algunas propiedades generales de los conjuntos de Besicovitch. Para la definición de la dimensión de Minkowski o dimensión ‘box–counting’ puede verse [Fal 90].

Lema 5.2.1 *Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ un vector de probabilidad, y $B_{\mathbf{p}}$ el conjunto de Besicovitch asociado a (Ψ, \mathbf{p}) . Entonces*

i) $B_{\mathbf{p}}$ es $S\Psi$ -invariante (no-compacto), i.e. $S\Psi(B_{\mathbf{p}}) = B_{\mathbf{p}}$.

ii) $B_{\mathbf{p}}$ es denso en E .

iii) Si se verifica condición de abierto, $\dim_{\mathbb{M}}(B_{\mathbf{p}}) = s = \dim(E)$, donde $\dim_{\mathbb{M}}$ denota dimensión de Minkowski.

iv) $\mu_{\mathbf{p}}(B_{\mathbf{p}}) = 1$, donde $\mu_{\mathbf{p}}$ es la medida autosemejante inducida por \mathbf{p} .

demostración:

La parte i) es consecuencia de que lo que caracteriza a los puntos de $B_{\mathbf{p}}$ es la frecuencia asintótica de algun(os) código(s) $\mathbf{i} \in \pi^{-1}(x)$. Así, si $\mathbf{i} = (i_1 i_2 i_3 \dots) \in M^{\mathbb{N}}$ es tal que $\pi(\mathbf{i}) \in B_{\mathbf{p}}$ entonces $\pi(i_2 i_3 \dots) \in B_{\mathbf{p}}$ también, y además $\varphi_{i_1}(\pi(i_2 i_3 \dots)) = \pi(\mathbf{i})$, lo que prueba que $B_{\mathbf{p}} \subset S\Psi(B_{\mathbf{p}})$. En el otro sentido, si $\pi(\mathbf{i}) \in B_{\mathbf{p}}$, claramente $\varphi_j(\pi(\mathbf{i})) = \pi(j\mathbf{i}) \in B_{\mathbf{p}}$ para todo $j \in M$, y por tanto $B_{\mathbf{p}} \supset S\Psi(B_{\mathbf{p}})$. Por supuesto, los conjuntos $B_{\mathbf{p}}$ no son compactos, puesto que el único $S\Psi$ -invariante compacto es E .

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ un vector de probabilidad. Dado $y = \pi(\mathbf{j}) \in E$ y $\varepsilon > 0$, tomar $k_0 = \min\{k : r_{\mathbf{j}(k)} < \varepsilon\}$ y considerar una secuencia $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \dots) \in B_{\mathbf{p}}$ tal que $i_k = j_k$ para $1 \leq k \leq k_0$. Claramente $d(y, \pi(\mathbf{i})) < \varepsilon$, lo que prueba la densidad de $B_{\mathbf{p}}$ en el autosemejante E . Observar que la densidad de $B_{\mathbf{p}}$ no requiere que $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$.

La propiedad iii) es consecuencia directa de la densidad de los conjuntos de Besicovitch en E y de las propiedades de la dimensión de Minkowski. En concreto, es bien sabido que para todo $A \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\dim_{\mathbb{M}}(A) = \dim_{\mathbb{M}}(\overline{A})$ (ver, e.g. [Fal 90]). Por otra parte, también es conocido que

$$\dim_{\mathbb{M}}(E) = \dim(E) \tag{5.7}$$

(ver [Fal 90]). De ii) se sigue el resultado.

La propiedad iv), que ya se ha utilizado repetidamente en el texto, es consecuencia de la ley fuerte de grandes números y de la definición de $\mu_{\mathbf{p}}$. \square

Observar que el lema anterior no requiere que $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. La propiedad iv) ilustra el hecho de que cualquier intento de estimar la dimensión de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ (ya que, como veremos, está también dada por la dimensión de Hausdorff de $B_{\mathbf{p}}$) mediante alguna técnica computacional de box-counting fracasará. Si se pretende obtener tal estimación otro tipo de cómputo dimensional sensible a la medida (e.g. dimensión local, dimensión de correlación) debe emplearse.

La propiedad ii) afirma que los conjuntos de Besicovitch son *autosemejantes*. Cuando se elimina la exigencia de que el conjunto $S\Psi$ -invariante sea compacto por supuesto se pierde la unicidad para el invariante, pero aparece toda una familia $\{B_{\mathbf{p}}\}_{\mathbf{p}}$ m -parámetrica de conjuntos invariantes, densos en el soporte de las medidas $\mu_{\mathbf{p}}$ (esto también caracteriza al conjunto E) que, como se ve a continuación ilustran de manera mas rica el fenómeno de la autosemejanza. La última propiedad del lema ilustra por un lado la idea de ‘tipicidad’ de los puntos de $B_{\mathbf{p}}$ respecto a la medida de probabilidad $\mu_{\mathbf{p}}$, y por otro provee un punto de vista alternativo al de los capítulos anteriores, i.e. el análisis dimensional y de medida de los conjuntos asociados de modo natural a la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. Desde ese punto de vista los conjuntos de Besicovitch no son más que uno de los muchos conjuntos relevantes asociados a la medida $\mu_{\mathbf{p}}$.

En resumen, las partes i) y iv) del teorema 5.2.1 revelan qué tipo de conjuntos se deben estudiar asociados naturalmente a la geometría y probabilidad del par autosemejante $(\Psi, \mu_{\mathbf{p}})$: los conjuntos $S\Psi$ -invariantes (que pueden llamarse autosemejantes) que concentran la masa de $\mu_{\mathbf{p}}$. Algunos de ellos se introducen a continuación. En particular, los conjuntos finos de Besicovitch han jugado un papel importante a lo largo de este trabajo.

Para $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_k) \in M^k$, sea $p_{\mathbf{j}} = \nu((\mathbf{j})) = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_k}$ (recordar que (\mathbf{j}) denota el cilindro cuyos k primeros dígitos son los de \mathbf{j}). Para $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$, sea $\delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i})$ la frecuencia asintótica de la secuencia finita \mathbf{j} en el código \mathbf{i}

$$\delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}\{q : i_q = j_1, i_{q+1} = j_2, \dots, i_{q+k-1} = j_k, 1 \leq q \leq n\}. \quad (5.8)$$

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ un vector de probabilidad. Definimos el conjunto de Besicovitch fino $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ asociado al par (Ψ, \mathbf{p}) como

$$B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{\mathbf{p}}^{(k)}, \quad (5.9)$$

donde

$$B_{\mathbf{p}}^{(k)} = \{\pi(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}, \delta_j(\mathbf{i}) = p_j \text{ para todo } j \in M^k\}. \quad (5.10)$$

Se puede demostrar como en el lema 5.2.1 que los conjuntos $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ también son autosemejantes no-compactos densos en E , de dimensión de Minkowski s (bajo condición de abierto), y de μ -medida plena. Este último hecho es una consecuencia del teorema ergódico de Birkhoff y juega un papel esencial en la demostración del Θ -lemma (ver capítulo 2, teorema 2.2.2).

Si se piensa en términos de la ley del logaritmo iterado hay otro conjunto autosemejante no-compacto que se define frecuentemente de modo natural. Llamamos $L_{\mathbf{p}}$ al conjunto

$$L_{\mathbf{p}} = \bigcap_{j \in M} \left\{ \pi(\mathbf{i}) : \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k(\delta_j(\mathbf{i}, k) - p_j)}{(2k \log \log k)^{1/2}} = (p_j(1 - p_j))^{1/2}, \right. \quad (5.11)$$

$$\left. \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k(\delta_j(\mathbf{i}, k) - p_j)}{(2k \log \log k)^{1/2}} = -(p_j(1 - p_j))^{1/2} \right\}, \quad (5.12)$$

donde $\delta_j(\mathbf{i}, k)$ es la frecuencia relativa definida en (5.5). Si M es finito, los códigos del conjunto $L_{\mathbf{p}}$ tienen la siguiente propiedad respecto al conjunto de variables aleatorias en M con esperanza nula

Lema 5.2.2 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ y $L_{\mathbf{p}}$ el conjunto definido en (5.11)-(5.12). Sea $X : M \mapsto \mathbb{R}$ una variable aleatoria tal que $\mathcal{E}[X] = 0$ y $\mathcal{E}[X^2] > 0$ (esperanza respecto a \mathbf{p}). Entonces*

$$(2k \log \log k)^{-1/2} |S_k^X(\mathbf{i})| < \sum_{j \in M} |x_j| (p_j(1 - p_j))^{1/2} < +\infty, \quad (5.13)$$

donde $X(j) = x_j$, para todo $j \in M$.

demostración:

Para mostrar la afirmación (5.13) considerar, para cada $j \in M$, la variable aleatoria centrada indicadora del dígito j , i.e.

$$\Delta_j(i) = \begin{cases} 1 - p_j & \text{si } i = j \\ -p_j & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.14}$$

Entonces $\mathcal{E}[\Delta_j] = 0$ y $\mathcal{E}[\Delta_j^2] = p_j(1 - p_j)$. Sea ahora X una variable centrada con $\mathcal{E}[X^2] > 0$. Observar que, para $i \in M$

$$x_i = x_i - \mathcal{E}[X] = x_i(1 - p_i) - \sum_{j \neq i} x_j p_j = \sum_{j \in M} x_j \Delta_j(i),$$

y por tanto la variable X se puede expresar como combinación lineal de las variables Δ_j mediante

$$X = \sum_{j \in M} x_j \Delta_j.$$

Además se tiene

$$S_k^X = \sum_{j \in M} S_k^{x_j \Delta_j} = \sum_{j \in M} x_j S_k^{\Delta_j}. \tag{5.15}$$

Por tanto, para $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^X(\mathbf{i})}{(2k \log \log k)^{1/2}} &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in M} \frac{x_j S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i})}{(2k \log \log k)^{1/2}} \geq \\ &\geq \sum_{j \in M} x_j \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i})}{(2k \log \log k)^{1/2}} \geq - \sum_{j \in M} |x_j| (p_j(1 - p_j))^{1/2}, \end{aligned}$$

donde se ha usado la relación (5.15), la versión discreta finita del lema de Fatou, y la definición (5.12). El razonamiento análogo para el límite superior produce

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^X(\mathbf{i})}{(2k \log \log k)^{1/2}} \leq \sum_{j \in M} |x_j| (p_j(1 - p_j))^{1/2},$$

usando de nuevo el lema de Fatou, de donde se sigue el resultado. \square

Nota 5.2.3 El anterior lema tiene cierto interés desde un punto de vista puramente probabilista, pues ilustra el hecho de que la ley del logaritmo iterado es lineal en el sentido precisado en el lema. Por otra parte, el hecho de que el teorema no se

cumpla para el caso numerable se debe a que la versión del lema de Fatou para el límite superior requiere la convergencia de la serie

$$\sum_{j \in M} \frac{x_j S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i})}{(2k \log \log k)^{1/2}}$$

para algún n , lo que no puede garantizarse en general. La hipótesis $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ no es estrictamente necesaria en el lema anterior. Sin embargo, si se quiere que el conjunto $L_{\mathbf{p}}$ tenga μ -medida plena es necesario que cada uno de los j conjuntos en la intersección (5.11)–(5.12) tenga μ -medida plena. Esto sucede cuando se verifica la ley del logaritmo iterado para cada variable Δ_j (ver la demostración del teorema 5.2.4). Ello requiere que $p_j > 0$ para cada $j \in M$, pues la ley del logaritmo iterado se cumple para variables de varianza positiva [Bil 78].

De nuevo, el conjunto $L_{\mathbf{p}}$ es denso en E . Además tiene μ -medida plena, pues es intersección finita de conjuntos que tienen μ -medida total como consecuencia de la ley del logaritmo iterado. Esto se mostrará en la prueba del siguiente teorema, que recoge los resultados de dimensión de los conjuntos de Besicovitch y el conjunto $L_{\mathbf{p}}$.

Teorema 5.2.4 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y sean $B_{\mathbf{p}}$, $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ y $L_{\mathbf{p}}$ los conjuntos definidos en (5.6), (5.9) y (5.11)–(5.12) respectivamente. Entonces*

$$\text{i) } \dim B_{\mathbf{p}} = \dim B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} = \dim L_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}),$$

$$\text{ii) } \text{Dim} B_{\mathbf{p}} = \text{Dim} B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} = \text{Dim} L_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}),$$

donde $s(\mathbf{p})$ es la dimensión de la medida autosemejante $\mu_{\mathbf{p}}$.

demostración:

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ y $\mu_{\mathbf{p}}$ la medida autosemejante asociada a \mathbf{p} . Para cada $j \in M$, sea Δ_j la variable aleatoria $M \rightarrow \mathbb{R}$ centrada indicadora del dígito j , que ha sido definida en (5.14). Un sencillo cálculo proporciona $\mathcal{E}[\Delta_j] = 0$ y $\mathcal{E}[\Delta_j^2] = p_j(1 - p_j)$. Si se usa la notación

$$S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i}) = \sum_{n=1}^k \Delta_j \circ \text{pr}_1 \circ \tau^n(\mathbf{i})$$

como en (3.27) , se tiene que $S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i}) = n\delta_j(\mathbf{i}, k)$ y por tanto los límites en (5.11) y (5.12) equivalen respectivamente a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (2k \log \log k)^{-1/2} S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i}) = (p_j(1 - p_j))^{1/2} \tag{5.16}$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (2k \log \log k)^{-1/2} S_k^{\Delta_j}(\mathbf{i}) = -(p_j(1 - p_j))^{1/2}. \tag{5.17}$$

La ley del logaritmo iterado aplicada a cada sucesión $\{S_k^{\Delta_j}\}_k$ implica que (5.16) y (5.17) se verifican, para cada $j \in M$, sobre un conjunto de ν -medida uno, y por tanto $\mu_{\mathbf{p}}(L_{\mathbf{p}}) = \nu(\pi^{-1}(L_{\mathbf{p}})) = 1$ ($L_{\mathbf{p}}$ es intersección finita de conjuntos de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena). Como $L_{\mathbf{p}}$, $B_{\mathbf{p}}$, y $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ tienen todos $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena, se sigue de la fórmula $\dim \mu_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p})$ en el teorema 3.3.3 que los tres conjuntos tienen dimensión de Hausdorff mayor o igual que $s(\mathbf{p})$.

Observar que (5.11) y (5.12) implican en particular

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_j(\mathbf{i}, k) = p_j$$

para cada $j \in M$, y por tanto $L_{\mathbf{p}} \subset B_{\mathbf{p}}$. De la inclusión $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} \subset B_{\mathbf{p}}$ se sigue que para concluir basta demostrar que $\text{Dim} B_{\mathbf{p}} \leq s(\mathbf{p})$. Del teorema 4.2.2 sabemos que la densidad logarítmica superior verifica

$$\bar{\alpha}_{\mu_{\mathbf{p}}}(x) \leq s(\mathbf{p}) \tag{5.18}$$

para $\mu_{\mathbf{p}}$ -casi todo punto en E . Eso no basta para concluir que la dimensión de $B_{\mathbf{p}}$ es $s(\mathbf{p})$, sino que se debe tener la desigualdad uniformemente en todo el conjunto. En el caso finito la propiedad asintótica de los códigos en $B_{\mathbf{p}}$ basta para probar que la desigualdad (5.18) es cierta para todo $x \in B_{\mathbf{p}}$. Sea $x \in B_{\mathbf{p}}$. Procediendo como en la prueba del teorema 4.2.2 se tiene, para todo código $\mathbf{i} \in \pi^{-1}(x)$

$$\frac{\log \mu_{\mathbf{p}}(B(\pi(\mathbf{i}), r))}{\log r} \leq \frac{\log \mu_{\mathbf{p}}(F_{\mathbf{i}(k_1)})}{\log r_{\mathbf{i}(k_1-1)}}, \tag{5.19}$$

donde $k_1 = \min\{k : r_{\mathbf{i}(k)} < r\}$. Escoger el código $\mathbf{i}_x \in \pi^{-1}(x)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_j(\mathbf{i}_x, k) = p_j \tag{5.20}$$

para todo $j \in M$. Para tal secuencia se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} S_k^Z(\mathbf{i}_x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in M} \delta_j(\mathbf{i}_x, k) Z(j) = \mathcal{E}[Z], \tag{5.21}$$

donde se usa la notación de (3.27), y $Z = R, Y$ son las variables definidas en (4.11). Como en la demostración del teorema 4.2.2 la desigualdad (5.19) se puede escribir con esa notación como

$$\frac{\log \mu_{\mathbf{p}}(B(\pi(\mathbf{i}), r))}{\log r} \leq \frac{k_1}{k_1 - 1} \frac{k_1^{-1} S_{k_1}^Y(\mathbf{i}_x)}{(k_1 - 1)^{-1} S_{k_1 - 1}^R(\mathbf{i}_x)}, \quad (5.22)$$

Del lema 4.2.1 se tiene que la desigualdad se respeta al tomar límites superiores, de modo que teniendo en cuenta (5.21), se obtiene en (5.22)

$$\bar{\alpha}_{\mu_{\mathbf{p}}}(\pi(\mathbf{i}_x)) \geq s(\mathbf{p}),$$

ya que $s(\mathbf{p}) = \mathcal{E}[Y]/\mathcal{E}[R]$. Como consecuencia, la desigualdad (5.18) se tiene para todo $x \in B_{\mathbf{p}}$. Sea $t > s(\mathbf{p})$ y $x \in B_{\mathbf{p}}$, la desigualdad (5.18) implica que

$$\frac{\mu_{\mathbf{p}}(B(x, r))}{(2r)^t} > 2^{-t}$$

se tiene para todo $r > 0$ menor que uno $r_0 = r_0(t)$ adecuado, y entonces la desigualdad

$$\theta_{\mu_{\mathbf{p}}}^t(x) > 2^{-t}, \quad (5.23)$$

se tiene para todo $x \in B_{\mathbf{p}}$. El teorema de Taylor–Tricot (ver sección 4.3) proporciona el resultado, i.e. de (5.23) se tiene $P^t(B_{\mathbf{p}}) < 2^{-t}$. Puesto que $t > s(\mathbf{p})$ es arbitrario se tiene $\text{Dim} B_{\mathbf{p}} \leq s(\mathbf{p})$, lo que concluye la prueba. \square

Nota 5.2.5 El teorema anterior no se tiene a partir del teorema 4.2.2 en el caso numerable. Ello se debe, como se apuntó arriba, a que la estimación que allí se obtiene para la densidad logarítmica superior sólo es válida $\mu_{\mathbf{p}}$ -a.e. Para obtener la acotación para todos los puntos del conjunto $x \in B_{\mathbf{p}}$ basta con que (5.21) se tenga para un código ‘bueno’ en $\pi^{-1}(x)$ (i.e. que cumpla (5.20)). El lema de Fatou no puede, sin embargo, garantizar tal cosa en este caso.

Nota 5.2.6 El teorema anterior generaliza la fórmula de la dimensión de Hausdorff (5.3) obtenida por Besicovitch y Eggleston para los conjuntos definidos en (5.6). Además, el resultado que concierne a la dimensión packing se aplica a los conjuntos de Besicovitch–Eggleston. En particular, éstos tienen igual dimensión Hausdorff y packing (son conjuntos fractales en el sentido de Taylor [Tay 86]).

Nota 5.2.7 Obsérvese que si se consideran los conjuntos de tipo Besicovitch $B_{\mathbf{p}}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, definidos en (5.10), el teorema 5.2.4 implica trivialmente que $\dim B_{\mathbf{p}}^{(k)} = \text{Dim} B_{\mathbf{p}}^{(k)} = s(\mathbf{p})$. De este modo, los subconjuntos de E generados por composiciones de semejanzas que respetan las frecuencias asintóticas de los bloques de longitud k también tienen dimensión $s(\mathbf{p})$.

El teorema 5.2.4 no proporciona ninguna información sobre cuál es la medida de Hausdorff y packing de los invariantes considerados. Esta siempre es una cuestión más fina que la de la dimensión. Aquí resolveremos este problema en algunos casos.

Proposición 5.2.8 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s$, i.e. $\mathbf{p}_s = (r_i^s : i \in M)$, entonces*

- i) $H^s(B_{\mathbf{p}_s}) = H^s(B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}) = H^s(L_{\mathbf{p}_s}) = H^s(E)$.
- ii) $P^s(B_{\mathbf{p}_s}) = P^s(B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}) = P^s(L_{\mathbf{p}_s}) = P^s(E)$.

Además, como M es finito, éstas medidas son finitas y positivas.

demostración:

Sea μ_s la medida autosemejante asociada al vector \mathbf{p}_s . Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(\Psi, \mathbf{p})}$ el operador de Hutchinson definido en (4.23),

$$\mathcal{M}\eta = \sum_{i \in M} r_i^s \eta \circ \varphi_i^{-1}.$$

Se demostró en la sección 4.3 que, sea M finito o numerable, hay una única medida μ tal que $\mathcal{M}\mu = \mu$ que se llama medida de probabilidad invariante asociada al par (Ψ, \mathbf{p}_s) . En la sección 4.3 se probó además que μ coincide con la medida μ_s . Si se escribe $A = \bigcup_{i \in M} \varphi_i(\varphi_i^{-1}(A))$ para $A \subset E$ se tiene de las propiedades de la medida de Hausdorff

$$H^s(A) = \sum_{i \in M} H^s(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(A))) = \sum_{i \in M} r_i^s H^s(\varphi_i^{-1}(A)) = \mathcal{M}H^s(A). \quad (5.24)$$

En particular, para obtener (5.24) se ha aplicado la propiedad de que $H^s(\varphi(A)) = r^s H^s(A)$ para una semejanza de razón r , y el hecho de que $H^s(\Theta) = 0$ [GMMR 93].

Entonces (5.24) implica que la medida H^s es también invariante para el operador de Hutchinson (5.2.8). Por la unicidad de la medida invariante se tiene que las medidas $(H^s(E))^{-1}H^s$ y μ_s coinciden. Puesto que $\mu_s(E \setminus B_{\mathbf{p}_s}) = 0$ entonces $H^s(E \setminus B_{\mathbf{p}_s}) = 0$, y por tanto $H^s(E) = H^s(B_{\mathbf{p}_s})$. El razonamiento sólo depende de que el conjunto $B_{\mathbf{p}_s}$ tiene μ_s -medida plena, de modo que se tiene i). La segunda afirmación se obtiene directamente de i) usando un resultado de Spear [Spe 92] que afirma que existe una constante K (que sólo depende del sistema $S\Psi$) tal que $P^s = KH^s$. La medida de Hausdorff de E es finita y positiva en el caso en que M es finito [Hut 81]. \square

La afirmación i) del teorema 5.2.8 se puede entender como una ley de los puntos ‘normales’ en E . Los puntos de $B_{\mathbf{p}_s}$ pueden considerarse como los ‘puntos normales’ (en el sentido de Borel) del autosemejante. Más todavía, el conjunto más pequeño $B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}$ puede pensarse como el verdadero ‘corazón’ de E , desde un punto de vista de la medida. Las fuertes propiedades de regularidad de los puntos de $B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}$ hacen que se piense en el conjunto fino de Besicovitch como el conjunto de los puntos *super-normales* de E . No se conoce relación de inclusión ninguna entre los conjuntos $B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}$ y $L_{\mathbf{p}_s}$, ambos incluidos en $B_{\mathbf{p}_s}$. M. Morán [Mor iv] ha demostrado que los códigos que verifican una propiedad de tipo logaritmo iterado (diferente de la que se exige a los códigos de $L_{\mathbf{p}_s}$) son códigos del conjunto fino de Besicovitch.

Nota 5.2.9 A continuación se hace alguna observación sobre la medida \mathcal{M} -invariante y sobre la medida packing en el teorema anterior. El resultado de Spear [Spe 92] no es *a priori* necesario, puesto que el razonamiento para la medida de Hausdorff es válido para P^s . Veamos esto. En primer lugar, la medida packing tiene también la propiedad $P^s(\varphi(A)) = r^s P^s(A)$ para toda semejanza φ de razón r . Una demostración de este hecho está esencialmente en el teorema 5.2.18 de este capítulo (también lo demuestra Spear en su artículo). El razonamiento en (5.24) es entonces válido para P^s siempre y cuando la P^s -medida del conjunto de solapamiento sea nula (observar que esto es necesario para justificar la primera igualdad en (5.24)). Esto puede demostrarse usando la $S\Psi$ -invariancia de E si $P^s(E) < +\infty$. La sencilla demostración de que $H^s(\Theta) = 0$ se sigue de $H^s(E) < +\infty$ puede verse en [GMMR 93]. Por tanto en el caso de la medida P^s es necesario que E sea de medida P^s finita. Esto lo demostró D. Spear [Spe 92] para construcciones dirigidas por grafos (o de Mauldin–Williams) verificando condición de abierto, que comprenden

el caso que nosotros tratamos aquí como particular. Por lo tanto, la medida P^s es también \mathcal{M} -invariante, y coincide, salvo el factor de normalización $(P^s(E))^{-1}$, con la medida H^s y con la medida μ_s . Este de hecho es un modo de conseguir el resultado de Spear en nuestro caso como consecuencia directa de la unicidad de la medida \mathcal{M} -invariante.

Nota 5.2.10 Alguna observación sobre el caso numerable puede ser relevante. En el caso $M = \mathbb{N}$ se tiene también (ver 4.3) la unicidad de la medida \mathcal{M} -invariante. Si $s = \dim E$ como siempre, M. Morán [Mor i] demostró además que la medida H^s de E es finita también en este caso (lo que no es cierto es que E tenga H^s -medida positiva en general). Por lo tanto, el mismo razonamiento para el caso finito de [GMMR 93] demuestra que $H^s(\Theta) = 0$ en el caso numerable. Sin embargo, debe añadirse la hipótesis adicional de que la serie $\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^s$ sume 1 (esto no tiene por qué suceder en general, ver [Mor i]). Revisamos el razonamiento en este caso. De la convergencia de la serie y de la $S\Psi$ -invariancia de E se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} H^s(\varphi_i(E)) = H^s(E) \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s = H^s(E) = H^s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(E)\right) < +\infty, \quad (5.25)$$

puesto que $H^s(E) < +\infty$. Por tanto, (5.25) implica que $H^s(\Theta) = 0$ también en este caso. Más aún, también sigue siendo válido el razonamiento en (5.24), de modo que la medida H^s es \mathcal{M} -invariante en el caso numerable. Sin embargo, no tiene por qué coincidir con la medida μ_s , puesto que en general no se tiene $H^s(E) > 0$ y por tanto la medida H^s no se puede normalizar a una medida en el espacio $\mathcal{MB}(E)$. Si $H^s(E) > 0$, la consecuencia es que se tiene la igualdad $\mu_s = (H^s(E))^{-1}H^s$ como consecuencia de la unicidad de la medida \mathcal{M} -invariante. En cuanto a la medida P^s de los conjuntos de Besicovitch nada puede decirse, ya que el problema de la medida (y dimensión) packing de los autosemejantes generados por infinitas semejanzas está abierto. No se sabe pues si la medida $P^s(E)$ es finita en el caso numerable. Sí se ha probado sin embargo el siguiente

Lema 5.2.11 *Sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, \mathbb{N})$ verificando condición de abierto. Asumir que $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s = 1$ y $H^s(E) > 0$. Sea $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s$, y μ_s la medida autosemejante asociada. Entonces $\mu_s = (H^s(E))^{-1}H^s$, y por lo tanto se tiene*

$$H^s(B_{\mathbf{p}_s}) = H^s(B_{\mathbf{p}_s}^{(\infty)}) = H^s(L_{\mathbf{p}_s}) = H^s(E).$$

demostración:

Ver la nota 5.2.10 para justificar la igualdad de las medidas autosemejante y de Hausdorff, y emplear el mismo razonamiento que en la prueba del lema 5.2.8 para obtener la igualdad de las H^s -medidas de los conjuntos arriba. \square

Cuando no se considera el 'caso normal' no es conocida la medida de Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch. Hemos obtenido una respuesta parcial a esa cuestión, que se desprende del siguiente resultado general sobre la medida de Hausdorff de los $S\Psi$ -invariantes.

Proposición 5.2.12 *Sea M finito o numerable. Sea $0 < t < s$, y $\phi(\xi) = \xi^t g(\xi) \in \mathcal{F}$, con g no-creciente en algún intervalo $(0, \delta_0)$. Entonces, o bien $H^\phi(B) = 0$, o bien $H^\phi(B) = +\infty$ para cualquier $S\Psi$ -invariante B tal que $\dim B > \dim(\Theta \cap B)$.*

demostración:

Sea φ una semejanza cualquiera con factor de contracción $r \leq 1$. Sea ϕ como en el enunciado del teorema. En primer lugar demostramos que

$$H^\phi(\varphi(A)) \geq r^t H^\phi(A), \quad (5.26)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^N$. Sea $0 < \delta < \delta_0$, y sea $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -covering de $\varphi(A)$ mediante bolas. Si escribimos $U_i = \varphi^{-1}(V_i)$ para cada i , entonces $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un δ/r -covering de A por bolas. Puesto que g es no-creciente se tiene

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \phi(|V_i|) = r^t \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^t g(r|U_i|) \geq r^t \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^t g(|U_i|) = r^t \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi(|U_i|),$$

lo que prueba que $H_\delta^\phi(\varphi(A)) \geq r^t H_{\delta/r}^\phi(A)$. Si δ decae a cero obtenemos (5.26).

Sea ahora B un $S\Psi$ -invariante tal que $\dim B > \dim(B \cap \theta)$. Esto supone que

$$\sum_{i \neq j} H^\phi(\varphi_i(B) \cap \varphi_j(B)) \leq \sum_{i \in M} H^\phi \varphi_i(B).$$

Asumir que $0 < H^\phi(B) < +\infty$. Entonces, usando (5.26), tenemos

$$H^\phi(B) = H^\phi(S\Psi(B)) = \sum_{i \in M} H^\phi(\varphi_i(B)) \geq \sum_{i \in M} r_i^t H^\phi(B) > H^\phi(B), \quad (5.27)$$

donde se ha aplicado que $t < s$, la definición de s , y el hecho de que la función de x $\sum_{i \in M} r_i^x$ es decreciente. La contradicción en (5.26) implica que el conjunto B tiene H^ϕ -medida cero o infinito. \square

Para el caso particular de los conjuntos de Besicovitch–Eggleston $\Lambda_2(p, 1 - p)$, se demostró en 1967 [Smo 67] que la ϕ -medida de Hausdorff es 0 ó ∞ para toda función de dimensión ϕ cóncava en un entorno del origen. Un resultado del tipo de la proposición 5.2.12 se ha encontrado para construcciones autoafines [Per 94].

Ahora la proposición 5.2.12 se aplica a los invariantes que hemos considerado, con $t = s(\mathbf{p})$ y $g(\xi) = 1$ en el enunciado de la proposición, y tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.2.13 *Sea M finito o numerable, Ψ verificando OSC. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$. Entonces, los siguientes conjuntos tienen medida de Hausdorff nula o infinita en su dimensión*

- i) *Todo conjunto $S\Psi$ -invariante para un sistema de semejanzas Ψ disconexo, i.e. tal que $\Theta = \emptyset$. En particular, los conjuntos $B_{\mathbf{p}}$, $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, y $L_{\mathbf{p}}$ asociados a Ψ definidos en (5.6), (5.9), y (5.11)-(5.12) respectivamente.*
- ii) *Todos los conjuntos de Besicovitch $B_{\mathbf{p}}$, y los conjuntos $L_{\mathbf{p}}$, asociados a Ψ , y tales que $\dim(\Theta \cap B_{\mathbf{p}}) < s(\mathbf{p})$.*
- iii) *Todos los conjuntos finos de Besicovitch $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, asociados a Ψ .*

Obsérvese que iii) es consecuencia de que los conjuntos $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ tienen la fuerte propiedad de que $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} \cap \Theta = \emptyset$ (ver la demostración del Θ -lema). De esta manera, el resultado también se tiene para todo invariante que no interseca el solapamiento. Obsérvese que el solapamiento Θ^* (con ∂V) es él mismo un conjunto invariante. Se puede tener $B_{\mathbf{p}} \cap \Theta^* \neq \emptyset$, pero para $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ es plausible pensar que los puntos de $B_{\mathbf{p}} \cap \Theta^*$ no son los que están dimensionando al conjunto $B_{\mathbf{p}}$. Así, el requerimiento $\dim B_{\mathbf{p}} \cap \Theta < s(\mathbf{p})$ sería superfluo.

Destacamos el siguiente corolario, que puede tener interés en sí mismo. Recordar que un conjunto A tal que $0 < H^t(A) < +\infty$ se llama t -conjunto.

Corolario 5.2.14 *Sea M finito o numerable. Para $\dim\Theta < t < s$ no existe ningún t -conjunto $S\Psi$ -invariante.*

Puesto que $\dim\mu = \inf\{\dim A : \mu(A) = 1\}$ es claro que todo conjunto de μ -medida plena tal que $\dim(A) = \dim\mu$ resulta de interés con objeto de caracterizar la geometría de μ . No obstante, no hay en general un conjunto minimal (e.g. en la clase de los borelianos) sobre el que μ esté concentrado. Excepto en el caso en que μ esté concentrada sobre un conjunto numerable, siempre se puede encontrar un subconjunto propio de uno dado y de igual medida y dimensión. En el caso de las medidas autosemejantes, se sabe del capítulo 3 (ver corolario 3.3.8) que $\mu_{\mathbf{p}}$ es singular respecto a $H^{s(\mathbf{p})}$, y por tanto existen conjuntos de medida $\mu_{\mathbf{p}}$ -plena y $H^{s(\mathbf{p})}$ -medida de Hausdorff nula. A la vista de los resultados obtenidos, dicho conjunto puede caracterizarse en términos de la ley del logaritmo iterado.

Sea $X : M \mapsto \mathbb{R}$ la variable aleatoria definida mediante

$$X(i) = \log p_i - s(\mathbf{p}) \log r_i, \quad i \in M,$$

y definir el conjunto

$$N_{\mathbf{p}} = \{\pi(\mathbf{i}) \in B_{\mathbf{p}}^{(\infty)} : \mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}, \quad \limsup_k ((2k \log \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i})) = d(\mathbf{p})\} \quad (5.28)$$

$$\liminf_k ((2k \log \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i})) = -d(\mathbf{p})\},$$

donde $d(\mathbf{p})$ está definido en (3.58) y la notación que se usa es la de (3.27).

Teorema 5.2.15 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$, y $\mu_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}^+$ la medida autosemejante asociada. Entonces el conjunto $N_{\mathbf{p}}$ definido en (5.28) es un conjunto de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena, y con*

$$\dim N_{\mathbf{p}} = \text{Dim} N_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p}).$$

Además $H^{s(\mathbf{p})}(N_{\mathbf{p}}) = 0$ y $P^{s(\mathbf{p})}(N_{\mathbf{p}}) = +\infty$.

demostración:

Ponemos μ para la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. Puesto que $\mu(B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}) = 1$, el conjunto $N_{\mathbf{p}}$ tiene también μ -medida uno (en particular no es vacío) como consecuencia de la ley del logaritmo iterado, aplicada a la sucesión de variables aleatorias $\{S_k^X\}_k$. Por lo tanto $\dim N_{\mathbf{p}} \geq s(\mathbf{p})$. Como $N_{\mathbf{p}} \subset B_{\mathbf{p}}$ se tiene que $\text{Dim} N_{\mathbf{p}} \leq s(\mathbf{p})$.

Sea $\phi_\alpha \in \mathcal{G}_H$, donde \mathcal{G}_H es la familia definida en (3.36). Para cada $\mathbf{i}_x = \pi^{-1}(x) \in N_{\mathbf{p}}$ se tiene

$$\limsup_k ((2k \log \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i}_x)) = d(\mathbf{p}), \tag{5.29}$$

de modo que la ϕ_α -densidad superior $\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}$, de μ en x se escribe

$$\bar{d}_\mu(x) = \exp\left\{\limsup_k f_c(r_{\mathbf{i}_x(k)}) \left(\frac{S_k^X(\mathbf{i}_x)}{f_c(r_{\mathbf{i}_x(k)})} - \alpha\right)\right\}, \tag{5.30}$$

donde f_c es la función definida en (3.49) y $c = c(\mathbf{p})$ dada en (3.37). Puesto que $d(\mathbf{p}) > 0$ si $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$, se sigue de (5.29), del lema 3.3.6 (i.e. $f_c(r_{\mathbf{i}_x(k)}) \sim (2k \log \log k)^{-1/2}$ si $k \rightarrow \infty$), y (5.30) que

$$\bar{d}_\mu^{\phi_\alpha}(x) = +\infty$$

para todo $0 \leq \alpha < d(\mathbf{p})$. Puesto que $N_{\mathbf{p}}$ tiene μ -medida positiva, el teorema de densidad 3.2.3 implica que $H^{\phi_\alpha}(N_{\mathbf{p}}) = 0$ para $0 \leq \alpha < d(\mathbf{p})$. Como $H^{s(\mathbf{p})} \leq H^{\phi_\alpha}$ para todo $\alpha \geq 0$ se sigue que $H^{s(\mathbf{p})}(N_{\mathbf{p}}) = 0$.

Procedemos de igual modo con la medida packing. Sea \mathcal{G}_P la familia definida en (4.51). Para todo $x \in N_{\mathbf{p}}$, el código $\mathbf{i}_x = \pi^{-1}(x)$ verifica

$$\liminf_k ((2k \log \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i}_x)) = -d(\mathbf{p}). \tag{5.31}$$

Usando el teorema 4.3.4 del capítulo 4 se tiene que

$$\psi_\alpha(\rho u) \underline{\theta}_\mu^{\psi_\alpha}(x) \leq \underline{d}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = \exp\left(\liminf_k f_c(r_{\mathbf{i}_x(k)}) \left(\frac{S_k^X(\mathbf{i}_x)}{f_c(r_{\mathbf{i}_x(k)})} + \alpha\right)\right). \tag{5.32}$$

Usando (5.31), y el lema 3.3.6 de nuevo se tiene de (5.32)

$$\underline{\theta}_\mu^{\psi_\alpha}(x) = 0 \tag{5.33}$$

para todo $0 \leq \alpha < d(\mathbf{p})$. Puesto que el conjunto $N_{\mathbf{p}}$ tiene μ -medida positiva, el teorema de Taylor-Tricot parte i) (ver 4.3) implica que $P^{\psi_\alpha}(N_{\mathbf{p}}) = +\infty$ para

$0 \leq \alpha < d(\mathbf{p})$ (esto se demuestra en detalle en la prueba del teorema 3.3.1) para. Puesto que $P^{s(\mathbf{p})} \geq P^{\psi_\alpha}$ para todo $\alpha \geq 0$ se tiene que $P^{s(\mathbf{p})}(N_{\mathbf{p}}) = +\infty$. \square

Nota 5.2.16 Notar que para la afirmación de la proposición 5.2.15 sobre la medida de Hausdorff del conjunto $N_{\mathbf{p}}$ basta con que los códigos de $N_{\mathbf{p}}$ cumplan

$$\limsup_k ((2k \log \log k)^{-1/2} S_k^X(\mathbf{i}) = d(\mathbf{p}),$$

pues éste conjunto mayor que $N_{\mathbf{p}}$ también tiene medida $H^{s(\mathbf{p})}$ cero. Sin embargo, la condición sobre el límite inferior garantiza que el conjunto $N_{\mathbf{p}}$ tiene además $P^{s(\mathbf{p})}$ -medida infinita.

El teorema 5.2.15 demuestra de hecho el siguiente

Corolario 5.2.17 *Sea M finito. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, con $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_s$, entonces*

$$P^{s(\mathbf{p})}(B_{\mathbf{p}}) = P^{s(\mathbf{p})}(B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}) = +\infty.$$

demostración:

Ambos conjuntos contienen el conjunto de μ -medida positiva $N_{\mathbf{p}}$, que tiene $s(\mathbf{p})$ -medida packing infinita, según el teorema 5.2.15. \square

Para obtener este último resultado hubiera bastado probar que el conjunto $B_{\mathbf{p}}$ contiene un conjunto de μ -medida positiva con la $s(\mathbf{p})$ -densidad inferior $\underline{\theta}_\mu^{s(\mathbf{p})}$ uniformemente acotada por encima sobre este subconjunto, como la siguiente proposición, simétrica a la proposición 5.2.12, demuestra.

Proposición 5.2.18 *Sea M finito o numerable. Sea $0 < t < s$, y $\psi(\xi) = \xi^t g(\xi) \in \mathcal{F}$, con g no-creciente en algún intervalo $(0, \delta_0)$. Entonces $P^\psi(B) = 0$ o $P^\psi(B) = +\infty$ para todo $S\Psi$ -invariante tal que $\text{Dim}(B) > \text{Dim}(B \cap \Theta)$.*

demostración:

La prueba es similar a la de la proposición 5.2.12. Sea φ una semejanza de razón de contracción $r \leq 1$. En primer lugar mostramos que $P^\psi(\varphi(A)) \geq r^t P^\psi(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^N$. Sea $0 < \delta < \delta_0/r$, y considerar un δ -packing de A , $\{B_i\}_i$. Observar que si $x \in \varphi(B_i) \cap \varphi(B_j)$ para $i \neq j$, entonces $\varphi^{-1}(x) \in B_i \cap B_j$. Por tanto $\{\varphi(B_i)\}_i$ es un δr -packing de $\varphi(A)$. Además se tiene

$$\sum_i \psi(|\varphi(B_i)|) = r^t \sum_i |B_i|^t g(r|B_i|) \geq r^t \sum_i |B_i|^t g(|B_i|) = r^t \sum_i \psi(|B_i|),$$

puesto que $r \leq 1$ y g es no-creciente en $(0, \delta_0)$. Por tanto $p_{\delta r}^\psi(\varphi(A)) \geq r^t p_\delta^\psi(A)$, de modo que si δ tiende a cero se tiene $P^\psi(\varphi(A)) \geq r^t P^\psi(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^N$. De esto se sigue que la medida packing verifica la desigualdad

$$P^\psi(\varphi(A)) \geq r^t P^\psi(A). \tag{5.34}$$

Suponer ahora que $0 < P^\psi(B) < +\infty$ para B tal que $\text{Dim}(B \cap \Theta) < \text{Dim} B$ $S\Psi$ -invariante. Entonces, usando la propiedad demostrada arriba para cada φ_i , se obtiene

$$P^\psi(B) = P^\psi\left(\bigcup_{i \in M} \varphi_i(B)\right) = \sum_{i \in M} P^\psi(\varphi_i(B)) \geq \sum_{i \in M} r_i^t P^\psi(B) > P^\psi(B), \tag{5.35}$$

puesto que la función $\sum_{i \in M} r_i^\xi$ es decreciente en ξ y toma el valor 1 en $\xi = s$. La contradicción en (5.35) implica que de hecho $P^\psi(B) = 0$ o $P^\psi(B) = +\infty$. \square

Nota 5.2.19 Observar que la hipótesis $\psi \in \mathcal{F}^+$ en la proposición 5.2.18 (en lugar de la hipótesis sobre la forma de la función ϕ) también demuestra que el invariante B tiene P^ψ -medida cero o infinito. En este caso se tiene, en lugar de (5.34) la desigualdad

$$P^\psi(\varphi(A)) \geq \psi(r)P^\psi(A),$$

y para obtener la contradicción en (5.35) se razona como sigue. Puesto que $\text{Dim} B < s$, existe $t < s$ tal que $\limsup_{\xi \rightarrow 0} (\log \psi(\xi) / \log \xi) < t$. Así, existe un entero k_0 tal que para todo $k > k_0$ se tiene $\psi(U^k) > (U^k)^t$ (recordar que $U = \max_{i \in M} \{r_i\}$), y por tanto fijado un $k > k_0$ se tiene

$$\sum_{i \in M^k} \psi(r_i) > \sum_{i \in M^k} r_i^t > 1$$

Si ahora se aplica el razonamiento de (5.35) a B como invariante del sistema Ψ^k se tiene el resultado. Observar que la hipótesis $\phi \in \mathcal{F}^+$ también puede sustituirse en la proposición 5.2.12 por la que allí se empleó para conseguir el resultado relativo a la medida de Hausdorff de los invariantes.

El siguiente corolario del teorema 5.2.18 es el simétrico al 5.2.14.

Corolario 5.2.20 *Sea $\text{Dim}\Theta < t < s$. No existe ningún conjunto $S\Psi$ -invariante con P^t -medida finita y positiva en su dimensión.*

Los resultados obtenidos en esta sección se aplican en particular al caso clásico de los conjuntos de Besicovitch–Eggleston.

Corolario 5.2.21 *Sea $(p_0, \dots, p_{m-1}) \in \mathcal{P}^+$. El conjunto de Besicovitch–Eggleston $\Lambda_m(p_0, \dots, p_{m-1})$ definido en (5.2), tiene las siguientes propiedades de medida*

$$\text{i) } H^{s(\mathbf{p})}(\Lambda_m(p_0, \dots, p_{m-1})) = 0 \text{ ó } +\infty$$

$$\text{ii) } P^{s(\mathbf{p})}(\Lambda_m(p_0, \dots, p_{m-1})) = +\infty,$$

donde $s(\mathbf{p}) = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i / \log m$ es la dimensión Hausdorff y packing del conjunto $\Lambda_m(p_0, \dots, p_{m-1})$.

demostración:

En el caso de los conjuntos de Besicovitch–Eggleston el conjunto de solapamiento Θ está formado por $m-1$ puntos, y entonces el conjunto Θ^* es numerable. Por tanto $\text{dim}\Theta = 0$, y la parte ii) del corolario 5.2.13 implica que la medida de Hausdorff de los conjuntos de Besicovitch–Eggleston es cero o infinito. La afirmación ii) es consecuencia directa del corolario 5.2.17. \square

5.3 Otros conjuntos definidos frecuentemente. La dimensión de Hausdorff–Billingsley.

En esta sección estudiamos propiedades de dimensión y medida de algunos subconjuntos de E formados por puntos x que están definidos mediante propiedades frecuenciales de alguno(s) código(s) de $\pi^{-1}(x)$ de modo natural. A diferencia de los de la sección anterior, los conjuntos que aquí se consideran no tienen porqué concentrar la medida autosemejante. De hecho el punto de vista es más el contrario; se definen subconjuntos de E mediante propiedades frecuenciales, y se considera una medida autosemejante que resulte útil para encontrar la dimensión del conjunto. Esta es una técnica estándar en teoría geométrica de la medida. Alguno de los conjuntos que se consideran está inspirado en el trabajo de Billingsley [Bil 60, Bil 61], y se usarán algunas de sus ideas. Durante esta sección consideraremos $M = \{1, 2, \dots, m\}$.

Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Consideramos en primer lugar el siguiente subconjunto de E

$$R_{\mathbf{p}} = \{\pi(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}, |\delta_i(\mathbf{i}, k) - p_i| = O(k^{-1}), \text{ para todo } i \in M\} \quad (5.36)$$

(se usa la notación $O(\cdot)$ de Landau para indicar que existe una constante C tal que $|\delta_i(\mathbf{i}, k) - p_i| < Ck^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Tales conjuntos fueron considerados por Billingsley en el espacio de códigos. Claramente se tiene que $R_{\mathbf{p}} \subset B_{\mathbf{p}}$ y por tanto $\dim R_{\mathbf{p}} \leq s(\mathbf{p})$. Puesto que el conjunto $R_{\mathbf{p}}$ es mucho más pequeño que el conjunto de Besicovitch $B_{\mathbf{p}}$, una cuestión primera es saber si la $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida de $R_{\mathbf{p}}$ decae respecto a la de $B_{\mathbf{p}}$, donde $\mu_{\mathbf{p}}$ es la medida autosemejante en E asociada al vector \mathbf{p} . Considerar el conjunto

$$\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : |\delta_i(\mathbf{i}, k) - p_i| = O(k^{-1}), \text{ para todo } i \in M\} \subset M^{\mathbb{N}}. \quad (5.37)$$

La ley del logaritmo iterado permite demostrar que el conjunto $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$ tiene $\nu_{\mathbf{p}}$ -medida nula. Eso permite demostrar que $R_{\mathbf{p}}$ tiene $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida nula.

Lema 5.3.1 *Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y $\mu_{\mathbf{p}}$ la medida autosemejante asociada. Entonces*

$$\mu_{\mathbf{p}}(R_{\mathbf{p}}) = 0,$$

donde $R_{\mathbf{p}}$ es el conjunto definido en (5.36).

demostración:

Las ideas en el espacio de códigos son las de [Bil 60]. Considerar el conjunto

$$\mathcal{L}_p = \{i \in M^{\mathbb{N}} : |\delta_i(i, k) - p_i| = o\left(\left(\frac{\log \log k}{k}\right)^{1/2}\right), \text{ para todo } i \in M\}.$$

La notación con “o” pequeña quiere decir que, para cada $i \in M$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\delta_i(i, k) - p_i|}{(k^{-1} \log \log k)^{1/2}} = 0,$$

y por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k |\delta_i(i, k) - p_i|}{(k \log \log k)^{1/2}} = 0.$$

La ley del logaritmo iterado aplicado a la sucesiones de variables aleatorias $\{S_k^{\Delta_i}\}_k$ (con Δ_i la variable centrada indicadora de i , ver definición en (5.14)), implica entonces que el conjunto \mathcal{L}_p tiene ν_p -medida nula ver (5.16)-(5.17). Claramente $\mathcal{R}_p \subset \mathcal{L}_p$, lo que prueba que $\nu_p(\mathcal{R}_p) = 0$. Esto no basta para probar que el conjunto R_p tiene μ -medida cero, puesto que $\pi^{-1}(R_p) \supset \mathcal{R}_p$. Sin embargo, el Θ -lemma prueba que

$$\mu_p(R_p) = \nu_p(\pi^{-1}(R_p \setminus \Theta^*)) \leq \nu_p(\mathcal{R}_p) = 0, \quad (5.38)$$

y también el lema. \square

Por lo tanto, el conjunto R_p es de μ_p -medida nula, y puede suceder que también la medida geométrica decaiga. De hecho, la dificultad está ahora, antes que en encontrar la medida de R_p en dimensión $s(p)$, en encontrar una cota inferior para la dimensión. Ello se debe a que los métodos de densidad empleados hasta ahora en esta memoria (y en la literatura) requieren siempre conjuntos con medida positiva para la obtención de cotas inferiores de la dimensión de Hausdorff (ver capítulos 3 y 4). Sin embargo, esta exigencia se puede debilitar usando el concepto de dimensión de Hausdorff que Billingsley introdujo en [Bil 60], y que definimos a continuación.

Sea ν la medida producto en $M^{\mathbb{N}}$ asociada a $p \in \mathcal{P}^+$. Sea $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ el proceso independiente bajo ν en $M^{\mathbb{N}}$ (de Bernoulli) dado por $Z_j(i) = i_j$ para $i = (i_1 i_2 \dots) \in M^{\mathbb{N}}$. Sea $A \subset M^{\mathbb{N}}$, y $\delta > 0$ se dice que una colección finita o numerable \mathcal{U} de cilindros es un (ν, δ) -recubrimiento de A si $\nu(u) < \delta$ para todo $u \in \mathcal{U}$, y $A \subset \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u$.

Para $t \geq 0$ se define la *medida de Hausdorff-Billingsley* t -dimensional de A (asociada a la medida ν y al proceso $\{Z_j\}_j$) mediante

$$h_\nu^t(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{u \in \mathcal{U}} \nu(u)^t : \mathcal{U} \text{ es un } (\nu, \delta) \text{-recubrimiento de } A \right\}, \quad (5.39)$$

y la *dimensión de Hausdorff-Billingsley* de A está dada por

$$\dim_\nu A = \sup \{t : h_\nu^t(A) = +\infty\} = \inf \{t : h_\nu^t(A) = 0\}. \quad (5.40)$$

El número $\dim_\nu A$ depende del proceso también, pero como permanecerá fijo en nuestra discusión sólo destacamos la dependencia en la medida ν . Se demuestra en [Bil 60] que la expresión detrás del $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ en (5.39) (que se denota por $h_\nu(A, \delta)$) es una medida exterior, que el número definido en (5.40) tiene sentido, y que $0 \leq \dim_\nu \leq 1$ (si todo $i \in M^{\mathbb{N}}$ tiene ν -medida cero).

Aunque $\nu_{\mathbf{p}}(\mathcal{R}_{\mathbf{p}}) = 0$, Billingsley [Bil 60] demostró usando técnicas combinatorias que

$$\dim_{\nu_{\mathbf{p}}}(\mathcal{R}_{\mathbf{p}}) = 1. \quad (5.41)$$

Así que ‘si se considera el conjunto donde $\delta_i(i, k) \rightarrow p_i$ a cierta tasa y luego se aumenta la tasa, la medida del conjunto se hace 0 mucho antes de que la dimensión decaiga por debajo de 1’.

Se tiene que $\dim_\nu A = 1$ si $\nu(A) > 0$, mientras que desde luego la implicación contraria no es cierta. Nuestro objetivo es demostrar que la hipótesis, más débil que $\nu(A) > 0$, de que un conjunto tiene dimensión de Hausdorff-Billingsley 1 basta para obtener información sobre la dimensión geométrica de su proyección por π . Sin embargo, será necesario que el hecho de que un conjunto A en el espacio de códigos tenga dimensión de Hausdorff-Billingsley plena no se deba a la contribución del solapamiento. Se demostró en el Θ -lema que $\nu_{\mathbf{p}}(\pi^{-1}(\Theta)) = 0$ para $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$, y se puede pensar que también se tiene el resultado más fuerte de que la dimensión de Hausdorff-Billingsley de $\pi^{-1}(\Theta)$ es estrictamente menor que uno. Ello tendría la importante consecuencia de que si $\dim_\nu A = 1$ entonces también $\dim_\nu(A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)) = 1$. Del lema 2.2.4 se sabe que $\Theta^* \subset \pi(\Xi)$, y entonces $\pi^{-1}(\Theta^*) \subset \Xi$, donde Ξ es el conjunto definido en (5.42). Por tanto, si se tiene en general que $\dim_\nu \Xi < 1$, entonces se tiene también que $\dim_\nu \pi^{-1}(\Theta^*) < 1$. Este sin embargo no es el caso. Se sabe del lema 2.2.4 que $\nu(\Xi) = 0$. Puede pensarse de esto que el conjunto Ξ (y por tanto

que el conjunto $\pi^{-1}(\Theta^*)$ contenido en Ξ es 'pequeño'. La dimensión de Hausdorff-Billingsley precisamente matiza el hecho de que el conjunto Ξ sea improbable (i.e. de ν -medida nula). En este caso, se puede probar que el conjunto Ξ es improbable, pero 'no demasiado', es decir, tiene dimensión de Hausdorff-Billingsley $\dim_{\nu, \mathbf{p}}$ plena para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. Demostramos en el siguiente teorema que la dimensión de Ξ es uno cuando $\nu = \nu_s$, i.e. el vector de probabilidad es $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s$. El caso general se prueba con ideas similares.

Observar que Ξ se puede escribir como

$$\Xi = \bigcup_{\mathbf{j} \in M^*} A(\mathbf{j}), \quad (5.42)$$

donde

$$A(\mathbf{j}) = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \delta_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = 0\}. \quad (5.43)$$

Teorema 5.3.2 Sea $\mathbf{p}_s = (r_i^s : i \in M) \in \mathcal{P}^+$. Sea $\Xi \subset M^{\mathbb{N}}$ el conjunto definido en (5.42), entonces

$$\dim_{\nu_s} \Xi = 1, \quad (5.44)$$

donde ν_s es la medida producto en $M^{\mathbb{N}}$ asociada a \mathbf{p}_s .

demostración:

Sea $\mathbf{j} \in M^k$, y considerar el conjunto $A(\mathbf{j})$ definido en (5.43). Definir el subconjunto de vectores de probabilidad de \mathbb{R}^{m^k} dado por

$$S_{\mathbf{j}} = \{\zeta = (\zeta_i : i \in M^k) \in \mathbb{R}^{m^k} : \sum_{i \in M^k} \zeta_i = 1, \zeta_{\mathbf{j}} = 0, \text{ y } \zeta_i > 0 \text{ para } i \neq \mathbf{j}\}.$$

Si se considera, para cada k y para cada $\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}}$, el vector de frecuencias

$$\delta(\mathbf{i}, k) = (\delta_l(\mathbf{i}, k) : l \in M^{m^k}),$$

el conjunto $A(\mathbf{j})$ se puede expresar como

$$A(\mathbf{j}) = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} d(\delta(\mathbf{i}, k), S_{\mathbf{j}}) = 0\},$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ denota distancia euclídea en \mathbb{R}^{m^k} .

Considerar ahora el vector de probabilidad $\mathbf{p}_s(k) = (r_i^s : i \in M^k)$. Se demostró en el capítulo 4 (ver la sección 4.2) que la medida producto asociada a $\mathbf{p}_s(k)$ es la medida ν_s . En realidad se probó allí que esto sucede para la medida μ_s como medida invariante para el operador de Hutchinson, pero como μ_s y ν_s son 'isomorfas' (i.e. sus espacios de medida), y el isomorfismo de espacios de medida es una relación de equivalencia, el resultado se tiene también para la medida ν_s . Si se considera el vector $\mathbf{p}_s(k)$ y la medida inducida ν_s , y se expresa $A(\mathbf{j})$ como arriba se tiene el siguiente resultado, que Billingsley demostró en [Bil 61]

$$\dim_{\nu_s} A(\mathbf{j}) = \sup_{\zeta \in S_{\mathbf{j}}} \frac{\sum_i \zeta_i \log \zeta_i}{\sum_i \zeta_i \log r_i^s}. \tag{5.45}$$

Para $q \in \mathbb{N}$ arbitrario, y vectores de probabilidad de \mathbb{R}^q $\zeta = (\zeta_i : i = 1, \dots, q)$ y $\mathbf{p} = (p_i : i = 1, \dots, q)$ cualesquiera, se tiene la desigualdad

$$\frac{\sum_{i=1}^q \zeta_i \log \zeta_i}{\sum_{i=1}^q \zeta_i \log p_i} \leq 1. \tag{5.46}$$

Esto puede justificarse de la siguiente manera. Suponer que el cociente es mayor estrictamente que 1. Ello equivale a que $\sum_{i=1}^q \zeta_i \log(\zeta_i/p_i) > 0$. Pero esta última expresión es la información de Leibler-Kullback [Bil 60] o la entropía relativa de ζ respecto de \mathbf{p} , que es siempre no-negativa [Ren 70]. Por tanto se tiene (5.46). Observar que si se pone en (5.46) $q = m^k$ y cada ζ_i como $\zeta_i = r_i^s$ para cada $i \in M^k$, el cociente toma el valor 1, pero esta elección de ζ no está en $S_{\mathbf{j}}$. Para evaluar el supremo en (5.45) consideramos el vector de probabilidad $\zeta_0 \in S_{\mathbf{j}}$ definido por

$$\sum_{\substack{i \in M^k \\ i \neq \mathbf{j}}} r_i^t = 1, \tag{5.47}$$

donde $t = t(\mathbf{j})$. Puesto que $\sum_{\substack{i \in M^k \\ i \neq \mathbf{j}}} r_i^s < 1$, y la función $\sum_{\substack{i \in M^k \\ i \neq \mathbf{j}}} r_i^x$, es decreciente

en x , se tiene que $t < s$.

Ahora, el cociente en (5.45) se puede expresar como

$$\frac{t \sum_{i \neq j} \zeta_i \log \zeta_i}{s \sum_{i \neq j} \zeta_i \log r_i^t},$$

de modo que el supremo

$$\sup_{\zeta \in S_j} \frac{\sum_{i \neq j} \zeta_i \log \zeta_i}{\sum_{i \neq j} \zeta_i \log r_i^t}$$

se alcanza para ζ_0 y toma el valor 1 (ver (5.46)). De aquí se obtiene en (5.45)

$$\dim_{\nu_s} A(j) = \frac{t(j)}{s} < 1, \quad (5.48)$$

donde $t(j)$ es el valor real definido en (5.47), y $j \in M^*$ arbitrario.

Podría pensarse que, puesto que $\dim_{\nu_s} A(j) < 1$ para todo $j \in M^*$, se tiene $\dim \Xi < 1$. Esto no es cierto, ya que cuando la longitud de la secuencia omitida j tiende a infinito, el valor $t(j)$ se aproxima a s y por tanto la dimensión de Hausdorff-Billingsley del conjunto A_j está arbitrariamente próxima a 1. A continuación se precisa esta idea. Fijar un código $j \in M^{\mathbb{N}}$ cualquiera. Considerar $k \in \mathbb{N}$, y sea $t = t(k)$ tal que

$$\sum_{\substack{i \in M^k \\ i \neq j(k)}} r_i^t = 1.$$

Puesto que

$$\sum_{i \in M^k} r_i^t = \sum_{\substack{i \in M^k \\ i \neq j(k)}} r_i^t + r_{j(k)}^t = 1 + r_{j(k)}^t = \sum_{i \in M^k} r_i^s + r_{j(k)}^t,$$

se tiene

$$\sum_{i \in M^k} r_i^s - \sum_{i \in M^k} r_i^t < r_{j(k)}^t. \quad (5.49)$$

Por tanto, si k se toma suficientemente grande, $r_{j(k)}^t > 0$ es arbitrariamente pequeño, y por tanto $t = t(k)$ está arbitrariamente próximo a s (de (5.49) y de la continuidad de la función inversa de $\sum_{i \in M^k} r_i^x$). Por lo tanto, tomando k suficientemente grande, el conjunto $A(j(k))$ tiene dimensión arbitrariamente próxima a 1, y entonces

$$\dim \Xi = \sup_{j \in M^*} \dim A(j) = 1,$$

lo que demuestra el teorema. \square

Nota 5.3.3 Observar que el argumento de continuidad del teorema puede utilizarse para demostrar que

$$\dim_{\nu_{\mathbf{p}}}\Xi = 1$$

para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$. A continuación se esboza la extensión del argumento del teorema 5.3.2 para $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ arbitrario. Sea $\mathbf{j} \in M^{\mathbb{N}}$ arbitrario, y considerar $A(\mathbf{j}(k))$ como en (5.43). Considerar $\mathbf{p}^k = (p_i : i \in M^k)$ y la medida producto inducida en $M^{\mathbb{N}}$ que, razonando como antes, coincide con $\nu_{\mathbf{p}}$. Entonces la fórmula de Billingsley (5.45) dice ahora

$$\dim_{\nu_{\mathbf{p}}}A(\mathbf{j}(k)) := s(\zeta) = \sup_{\zeta \in S_{\mathbf{j}(k)}} \frac{\sum_i \zeta_i \log \zeta_i}{\sum_i \zeta_i \log p_i} \leq 1,$$

donde $S_{\mathbf{j}(k)}$ está definido como antes. Si se pone $\zeta = \mathbf{p}$ en la igualdad anterior se tiene $s(\mathbf{p}) = 1$, pero $\mathbf{p} \notin S_{\mathbf{j}(k)}$. Sin embargo, si se toma k suficientemente grande, de modo que $p_{\mathbf{j}(k)}$ esté próximo a 0, un argumento de continuidad muestra que existe $\zeta \in S_{\mathbf{j}(k)}$ tal que la diferencia $s(\mathbf{p}) - \zeta$ es arbitrariamente pequeña, y por tanto la dimensión de $A(\mathbf{j}(k))$ respecto a $\nu_{\mathbf{p}}$ está arbitrariamente próxima a 1. Puesto que para cada $k \in \mathbb{N}$ $\dim_{\nu_{\mathbf{p}}}\Xi \geq \dim_{\nu_{\mathbf{p}}}A(\mathbf{j}(k))$, se tiene que $\dim_{\nu_{\mathbf{p}}}\Xi = 1$.

El siguiente teorema debilita las hipótesis del corolario 3.2.9. Como se explicó en la nota 3.2.10, la literatura obtiene las estimaciones de dimensión de los subconjuntos geométricos \mathbb{R}^N distribuyendo una masa en \mathbb{R}^N de modo que el conjunto que se estudia tenga medida positiva. Si después se demuestra que la densidad logarítmica (adecuada) toma un valor uniforme sobre los puntos del conjunto, entonces se tienen resultados de dimensión del conjunto. Estos son los teoremas de densidad que se demostraron en la sección 3.3. Si el conjunto que se considera no tiene medida positiva, para alguna medida de la que se dispone en el contexto, no hay técnicas estándar para atacar el problema de estimar su dimensión por debajo. El siguiente teorema proporciona un camino para estimar la dimensión cuando el conjunto tiene medida nula. Esta idea no se ha explotado aún en la literatura del área, pero nuestra opinión es que puede resultar ciertamente útil si se consigue manipular la dimensión de Hausdorff–Billingsley. Nos permitirá obtener la dimensión del conjunto de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida nula $R_{\mathbf{p}}$ definido en (5.36).

Teorema 5.3.4 *Sea ν una medida producto en $M^{\mathbb{N}}$, y $A \subset M^{\mathbb{N}}$*

i) Si

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{\log r_{\mathbf{i}(k)}} \leq \gamma \text{ para todo } \mathbf{i} \in A,$$

entonces $\dim(\pi(A)) \leq \gamma$.

ii) Si

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{\log r_{\mathbf{i}(k)}} \geq \beta \text{ para todo } \mathbf{i} \in A,$$

y además $\dim_{\nu} A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*) = 1$, entonces $\dim(\pi(A)) \geq \beta$.

π es la proyección definida en (1.14).

demostración:

i) Sea $t > \gamma$, para todo $\mathbf{i} \in A$ se tiene

$$\overline{\limsup}_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu(\mathbf{i}(k))}{r_{\mathbf{i}(k)}^t} > 1.$$

Por tanto la t -densidad superior sobre cilindros definida en (3.10) verifica, para todo $x \in \pi(A)$

$$\overline{d}_{\mu}^t(x) \geq 1,$$

y el teorema de densidad 3.2.3 implica entonces que $\dim(\pi(A)) \leq t$. Puesto que $t > \gamma$ es arbitrario se tiene $\dim(\pi(A)) \leq \gamma$.

ii) Sea $t < 1$, existe un δ_0 tal que todo (ν, δ) -recubrimiento $\{\mathbf{u}_j\}_j$ de $A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$, con $\delta < \delta_0$, verifica

$$\sum_j \nu^t(\mathbf{u}_j) > 0. \quad (5.50)$$

Ello es posible gracias a que la dimensión de $A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$ es 1. Sea $D = \pi(A) \setminus \Theta^*$. Basta demostrar que $\dim D \geq \beta$. Puesto que $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(D) = A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$ se tiene que $\dim_{\nu} \mathcal{D} = 1$ y que

$$\liminf_k \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{\log r_{\mathbf{i}(k)}} \geq \beta \quad (5.51)$$

para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{D}$. Sea $\xi < \beta$, y considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{\mathbf{i} \in \mathcal{D} : \nu(\mathbf{i}(k)) < r_{\mathbf{i}(k)}^{\xi} \text{ para todo } k > n\},$$

de modo que $\{\mathcal{D}_n\}_n$ es una sucesión creciente a \mathcal{D} . Puesto que

$$\dim_\nu \mathcal{D} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_\nu \mathcal{D}_n$$

(esto se prueba en [Bil 60]), existe n_0 tal que $\dim_\nu \mathcal{D}_n > t$ para todo $n \geq n_0$.

Sea un $n > n_0$. Sea $0 < \eta < \min\{u^n, \delta^{1/\xi}\}$, y considerar un η -recubrimiento $\{B_i\}_i$ por bolas de $\pi(\mathcal{D}_n)$. Considerar, para cada i , el conjunto de cilindros geométricos $G(B_i)$ definido en (3.11), i.e.

$$G(B_i) = \{F_{i(k)} : i \in M^{\mathbb{N}}, F_{i(k)} \cap B_i \neq \emptyset, r_{i(k)} \leq |B_i|, \text{ pero } r_{i(k-1)} > |B_i|\}.$$

Observar que

$$\nu(i(k)) < r_{i(k)}^\xi < |B_i|^\xi < \eta^\xi < \delta$$

para todo cilindro $i(k)$ tal que $F_{i(k)} \in G(B_i)$ para algún i . Puesto que $\pi(\mathcal{D}_n) \cap \Theta^* = \emptyset$, y $\bigcup_i \bigcup_{u \in G(B_i)} \pi(u)$ es un η -recubrimiento de $\pi(\mathcal{D}_n)$ mediante cilindros geométricos, se tiene que $\mathcal{U} = \bigcup_i \bigcup_{u \in G(B_i)} u$ es un (ν, δ) -recubrimiento de \mathcal{D}_n . Como $r_u < \eta < u^n$ para todo cilindro $u \in \mathcal{U}$, y por tanto $u = i(k)$ con $k > n$ para algún $i \in \mathcal{D}_n$, se tiene $r_u^\xi \geq \nu(u)$ para todo $u \in \mathcal{U}$. Usando el lema 3.2.1 se obtiene

$$\sum_i |B_i|^{t\xi} \geq q^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} r_u^{t\xi} \geq q^{-1} \sum_{u \in \mathcal{U}} \nu(u)^t > 0, \tag{5.52}$$

donde q es la constante en el lema 3.2.1, y la última desigualdad es consecuencia de (5.50). Por tanto (5.52) implica que $\dim \pi(\mathcal{D}_n) \geq \xi t$. Si $n \rightarrow \infty$ se tiene que $\dim(D) \geq \xi$. Puesto que $\xi < \beta$ es arbitrario se sigue que $\dim(D) \geq \beta$, y por tanto que $\dim \pi(A) \geq \beta$. \square

Nota 5.3.5 Lo que subyace tras el teorema 5.3.4 i) es que un recubrimiento de A en el espacio de códigos siempre proporciona un recubrimiento de $\pi(A)$ en el espacio geométrico E . Sin embargo, la cota inferior (parte ii)) tiene mayor dificultad, y requiere la hipótesis de que $\dim A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*) = 1$, debido al solapamiento que se produce en el espacio geométrico. Ello se debe a que recubrimientos muy ‘eficaces’ de A en el espacio de códigos no tienen que proyectar en general en recubrimientos eficaces de $\pi(A)$. La hipótesis de que la dimensión de Hausdorff–Billingsley de A sea 1 no basta para asegurar que la de $A \setminus \pi^{-1}(\Theta^*)$ también lo es.

Una aplicación directa del teorema 5.3.4 proporciona el siguiente

Corolario 5.3.6 *Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$ y $\nu_{\mathbf{p}}$ la medida producto asociada a \mathbf{p} en $M^{\mathbb{N}}$. Suponer $\dim_{\nu} \pi^{-1}(\Theta) < 1$, entonces $\dim R_{\mathbf{p}} = \text{Dim} R_{\mathbf{p}} = s(\mathbf{p})$, donde $R_{\mathbf{p}}$ es el conjunto definido en (5.36).*

demostración:

Como $R_{\mathbf{p}} \subset B_{\mathbf{p}}$ sólo hay que mostrar que

$$\dim R_{\mathbf{p}} \geq s(\mathbf{p}). \quad (5.53)$$

Sea el conjunto

$$\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : |\delta_i(\mathbf{i}, k) - p_i| = O(k^{-1})\}$$

Del resultado de Billingsley (5.41) se tiene que $\dim_{\nu} \mathcal{R}_{\mathbf{p}} = 1$. Puesto que $\dim_{\nu} \pi^{-1}(\Theta) < 1$, se tiene también $\dim_{\nu} \mathcal{R}_{\mathbf{p}} \setminus \pi^{-1}(\Theta) = 1$. El teorema 5.3.4 ii) con $A = \mathcal{R}_{\mathbf{p}}$ implica (5.53), ya que

$$\lim_k \frac{\log \nu(\mathbf{i}(k))}{-\log r_{\mathbf{i}(k)}} = s(\mathbf{p})$$

para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{R}_{\mathbf{p}}$. \square

El corolario anterior se tiene directamente para sistemas de semejanzas Ψ con solapamiento vacío, y para autosemejantes como el tapiz de Sierpinski, para los que se sabe que $\pi^{-1}(\Theta)$ es numerable (y por tanto $\dim_{\nu} \pi^{-1}(\Theta) = 0$, ver [Bil 60]). Observar que no basta con que Θ sea numerable. No obstante, parece plausible que en el caso del conjunto $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$ se tenga $\dim_{\nu} \mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \dim_{\nu}(\mathcal{R}_{\mathbf{p}} \setminus \Theta)$ para toda $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^+$.

A continuación consideramos un conjunto definido frecuentemente, pero a diferencia de los anteriores sus elementos no están caracterizado por propiedades asintóticas de las frecuencias $\delta_i(\cdot)$, sino que guardan 'memoria' de todas las frecuencias $\delta_i(\cdot, k)$, $k \in \mathbb{N}$. En concreto, sea $\Psi \in \mathcal{S}(N, 2)$ formado por dos semejanzas φ_0, φ_1 con factores de contracción $1 > r_0 \geq r_1 > 0$, y verificando la condición de abierto. Sea Ω el conjunto

$$\Omega = \{\mathbf{i} \in M^{\mathbb{N}} : \delta_0(\mathbf{i}, k) > \delta_1(\mathbf{i}, k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}, \quad (5.54)$$

y considerar el problema de encontrar la dimensión de Hausdorff del conjunto $\pi(\Omega) \subset \mathbb{R}^N$.

Utilizaremos las medidas autosemejantes y el teorema 5.3.4 para demostrar el

Teorema 5.3.7 *Sea Ω definido en (5.54), entonces*

$$\dim(\pi(\Omega)) = s = \text{Dim}(\pi(\Omega)),$$

donde s esta dado por $r_0^s + r_1^s = 1$.

demostración:

Sea $1/2 \leq p < 1$, y sea ν_p la medida producto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ asociada al vector $(p, 1 - p)$. Resultados sobre paseos aleatorios muestran que $\nu_{1/2}(\Omega) = 0$ (ver por ejemplo [Fel 68]). Técnicas de probabilidad relacionadas con funciones generatrices demuestran además que la ν_p -medida del conjunto Ω es positiva si $1/2 < p < 1$ [Fel 68].

Sea $p > 1/2$, y considerar el conjunto $\Omega \cap \mathcal{B}_p$, donde \mathcal{B}_p es el conjunto de Besicovitch en el espacio de códigos asociado al vector $(p, 1 - p)$. Puesto que $\nu_p(\mathcal{B}_p \cap \Omega) > 0$, en particular

$$\dim_{\nu_p} ((\Omega \cap \mathcal{B}_p) \setminus \pi^{-1}(\Theta)) = 1,$$

debido al Θ -lema. Por otra parte se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(i(k))}{\log r_{i(k)}} = \frac{p \log p + (1 - p) \log(1 - p)}{p \log r_0 + (1 - p) \log r_1} := s(p), \tag{5.55}$$

para todo $i \in \Omega \cap \mathcal{B}_p$. Por lo tanto el teorema 5.3.4 parte ii) implica que

$$\dim \pi(\Omega) \geq \dim(\pi(\Omega \cap \mathcal{B}_p)) \geq s(p).$$

Como $p > 1/2$ es arbitrario, si se considera en particular el vector de probabilidad (r_0^s, r_1^s) (observar que $p = r_0^s > 1/2$), se tiene que

$$\dim \pi(\Omega) \geq s(r_0^s) = s. \tag{5.56}$$

Puesto que s es la dimensión packing del autosemejante E asociado a Ψ , y $\pi(\Omega) \subset E$, se sigue que $\text{Dim} \pi(\Omega) \leq s$, y el resultado. \square

Nota 5.3.8 Una técnica alternativa, inspirada en [Bil 60], también proporciona la cota superior para la dimensión packing en el teorema anterior. Puesto que la cota inferior coincide con la dimensión del autosemejante eso ahorra el trabajo para la estimación superior. Sin embargo, creemos que las ideas que se presentan debajo pueden aplicarse en otras situaciones, e.g. cuando la estimación inferior no da la dimensión 'tope', y por ello las señalamos. Considerar el subconjunto de \mathbb{R}^2 definido por $S = \{(p, 1 - p) : 1/2 < p < 1\}$. Entonces

$$d((\delta_0(i, k), \delta_1(i, k)), S) = 0$$

para todo $i \in \Omega$. Por lo tanto, para todo $x = \pi(i) \in \pi(\Omega)$ existe un código $i_x \in \pi^{-1}(x)$ tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(i_x(k))}{\log r_{i_x(k)}} \leq \sup_{(p, 1-p) \in S} s(p). \quad (5.57)$$

El problema de optimización $\sup_{(p, 1-p) \in S} s(p)$ es equivalente al problema convexo

$$\max_{1/2 \leq p \leq 1} s(p),$$

que, por el teorema de Weierstrass, tiene solución. Esta se encuentra sin dificultad con un poco de cálculo, y viene dada por $p = r_0^s$. Por lo tanto, de (5.57) se sigue

$$\overline{D}_\mu(x) \leq s(r_0^s) = s,$$

donde $\overline{D}_\mu(x)$ es la densidad logarítmica superior de la medida μ en x

$$\overline{D}_\mu(x) = \inf_{i \in \pi^{-1}(x)} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(F_i^k)}{-\log r_1(k)}.$$

Por tanto $\text{Dim} \Omega \leq s$, y se consigue la cota superior.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta memoria se han presentado diversos resultados sobre la geometría de los conjuntos y medidas autosemejantes. El papel que tales conjuntos, desde principios de los años ochenta, y de tales medidas, desde finales de los ochenta y primeros de los noventa, están jugando en la moderna teoría geométrica de la medida, es esencial. Sean dirigidas determinista o estocásticamente, las construcciones autosemejantes componen la imagen paradigmática de los hoy día tan ubicuos fenómenos fractales. En este breve capítulo final apuntamos algunas observaciones referentes a los resultados que se han expuesto en esta memoria, y que a nuestro juicio, ilustran la investigación que hemos llevado a cabo. El capítulo en modo alguno pretende ser exhaustivo, ni recoger de nuevo toda la información que se presentó en el preámbulo de esta memoria. Asimismo, nuestro interés también consiste en destacar parte de la investigación que abre nuestro trabajo.

Los capítulos 2, 3, y 4 se han dedicado al estudio de la estructura probabilista, dinámica y geométrica de la familia de medidas autosemejantes $\mu_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}^+$ generadas por sistemas de semejanzas que verifican la condición de abierto.

El resultado central del capítulo 2 (el Θ -lema) afirma que, también cuando hay solapamiento no trivial, el espacio de medida $(E, \mu_{\mathbf{p}})$ es isomorfo al espacio de Cantor abstracto dotado de la medida producto $\nu_{\mathbf{p}} = \prod_1^{\infty} \mathbf{p}$. Cuando las construcciones autosemejantes son disjuntas, sus propiedades topológicas son las de un conjunto de

Cantor. Cuando la construcción es no disjunta pero verifica condición de abierto, se pierde esta equivalencia topológica pero hemos demostrado que se mantiene la equivalencia como espacio de medida, de modo que puede decirse que todos los espacios de medida (E, μ_p) son ‘esencialmente’ el mismo cuando se tiene la condición de abierto. Este resultado nos permite resolver el problema planteado por C. Bandt sobre la singularidad mutua de medidas autosemejantes bajo condición de abierto: dos medidas autosemejantes tales son mutuamente singulares.

El Θ -lema permite también obtener una fórmula para la dimensión de la medida μ_p en términos de la entropía de Kolmogorov-Sinaí, y de los exponentes característicos de Liapunov asociados a la dinámica de una aplicación shift definida en el conjunto autosemejante E (ver sección 2.3). Dichas dinámicas, por otra parte, han servido de ejemplo clásico de laboratorio de las dinámicas caóticas. Fórmulas como la que se obtiene en el corolario 2.3.8, en el espíritu de otras fórmulas clásicas en la literatura, arrojan una valiosa información acerca de cómo intervienen las magnitudes ergódicas (entropía y exponentes de Liapunov), que miden la estocasticidad del proceso dinámico que subyace, en la geometría de la dinámica cuando se representa en un espacio métrico. Observar que hay muchas formas de proyectar el shift de Bernouilli de m códigos en un espacio ambiente \mathbb{R}^N . Como la entropía de la medida producto ν_p es invariante bajo isomorfismos de transformaciones invariantes, no arroja información ninguna acerca de la geometría de μ_p . Es el ‘exponente de Liapunov’ del sistema (ver nota 2.3.9), i.e. el sistema de semejanzas Ψ finalmente, el que ‘gradua’ geoméricamente (y de manera diferente en general para cada proceso proyección) el contenido de incertidumbre probabilista en la evolución del shift de Bernouilli (que es común a todos los procesos).

Es nuestra opinión que el Θ -lema resolverá total o parcialmente algunos de los problemas abiertos en la literatura referentes a construcciones donde se produce solapamiento no trivial [EM 92, Fal 94].

Las secciones 3.3 y 4.3 en los capítulos 3 y 4 respectivamente muestran una propiedad más de ‘dualidad’ entre las medidas de Hausdorff y las medidas packing. En concreto, se ha demostrado que la medida autosemejante μ_p es singular respecto a la medida de Hausdorff en su dimensión, $H^{s(p)}$; mientras que es continua respecto a la medida packing $P^{s(p)}$. Diversos resultados de la literatura del área profundizan en la comprensión de la medida y dimensión packing buscando las diferencias y analogías que tiene con la medida y dimensión de Hausdorff. El resultado que

hemos obtenido exhibe una divergencia no-trivial entre ambos conceptos en lo que a su comportamiento respecto a las medidas autosemejantes se refiere.

La geometría autosemejante de sistemas infinitos es uno de los objetivos prioritarios de la investigación actual en el área. Este interés se justifica fácilmente, si se consideran las relevantes diferencias que la teoría de los sistemas infinitos de semejanzas tiene con respecto al caso finito, entre ellas el resultado de ‘aproximación’ en medida para abiertos acotados de \mathbb{R}^N (ver [Mor i]) y que muestra la flexibilidad de estas construcciones. Muchas propiedades del caso finito están abiertas o por reformular en el caso numerable, con el interés añadido de que las ideas del caso finito son insuficientes para abordar el caso general. En la sección 4.2 hemos demostrado que la fórmula de dimensión del caso finito se extiende de modo natural al caso infinito. Para ello ha sido necesario diseñar la técnica de ‘bola viajera’ introducida en el capítulo 4. Es seguro que esta novedosa técnica será de utilidad en otros problemas y construcciones de teoría geométrica de la medida, donde se requiere una traducción del comportamiento de una medida arbitraria sobre bolas al comportamiento de la misma sobre compactos asociados naturalmente a la construcción.

El capítulo 5 centra el interés en las propiedades de medida y dimensión de subconjuntos del autosemejante E . Como se explicó en los preliminares del capítulo 5, desde principios de los ochenta la geometría autosemejante sólo ha prestado atención a las propiedades del autosemejante E , prescindiendo del estudio de propiedades de subconjuntos de E relevantes. Nuestra opinión es que la estructura de probabilidad de que dotan las medidas autosemejantes $\mu_p \in \mathcal{M}^+$ al compacto E es esencial para comprender el fenómeno de la autosemejanza. Los conjuntos autosemejantes tienen una naturaleza intrínsecamente probabilista. Esa ha sido la perspectiva bajo la que se les ha considerado en esta memoria, y especialmente en el capítulo 5. De hecho, esta perspectiva probabilista de la autosemejanza surge de modo natural tanto si se consideran las medidas μ_p como los conjuntos E (de nuevo asoma la dualidad medida-conjunto que hemos ilustrado en la memoria). Por una parte, las medidas μ_p están siempre asociadas a los conjuntos que ‘representan’ toda la masa de la medida, que tienen una definición probabilista natural en términos de las frecuencias asintóticas de las semejanzas que intervienen en su génesis mediante la proyección π . El hecho de que tales conjuntos se caractericen mediante propiedades asintóticas los convierte en $S\Psi$ -invariantes, i.e. en autosemejantes (ver capítulo 5).

Por otra parte, como se explicó en la sección 5.1, si se parte del compacto E y uno se pregunta por los puntos típicos (respecto a la medida $\mu_{\mathbf{p}}$) del conjunto E , surge el concepto natural de los conjuntos que hemos definido en esta memoria como *conjuntos de Besicovitch* $B_{\mathbf{p}}$, que concentran la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ y son $S\Psi$ -invariantes. En cualquiera de los dos sentidos, el fenómeno de la autosemejanza parece vinculado a los conjuntos $S\Psi$ -invariantes de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena (para algún \mathbf{p}). Esto sugiere eliminar la restricción de la compacidad al considerar los conjuntos autosemejantes, como hemos hecho en la sección 5.2.

En nuestro trabajo hemos demostrado que existe una caracterización frecuencial de los puntos típicos de E respecto a la medida de Hausdorff H^s (recordar que $s = \dim E$). Más aún, dicha caracterización ha supuesto una generalización de la idea clásica de *normalidad de Borel* para los puntos del intervalo al contexto de los conjuntos autosemejantes. En concreto, hemos demostrado que si se selecciona un punto al azar en E , con respecto a la medida de probabilidad $\mu_s = (H^s(E))^{-1}H^s(\cdot)$, se tiene que la frecuencia asintótica del dígito $i \in M$ en el código que genera dicho punto está dada por r_i^s con μ_s -probabilidad uno.

Aunque la relevancia histórica de los conjuntos de Besicovitch es obvia, se debe mencionar especialmente entre la colección exhibida de los $S\Psi$ -invariantes de $\mu_{\mathbf{p}}$ -medida plena al *conjunto fino de Besicovitch* $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$, o como también se han llamado aquí el conjunto de puntos *super-normales* de la medida $\mu_{\mathbf{p}}$ /del conjunto E . Hemos encontrado su dimensión Hausdorff y packing (que coinciden), y hemos demostrado que la medida packing en su dimensión es infinito, mientras que la medida de Hausdorff es nula o infinito. Tales conjuntos no parecen haber sido considerados hasta hoy día en la literatura, y sin embargo tienen propiedades de regularidad estadística que los convierte en candidatos mucho más idóneos que los conjuntos gruesos de Besicovitch para representar a la medida $\mu_{\mathbf{p}}$. Recordar que, como se demostró en el Θ -lema, el conjunto $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ no interseca el conjunto de solapamiento Θ^* , lo que ha facilitado el desarrollo de muchos razonamientos.

El problema de encontrar la medida de Hausdorff exacta de los conjuntos de Besicovitch, y en particular de los conjuntos de Besicovitch-Eggleston, permanece abierto. Puede considerarse tal problema, en el contexto de los conjuntos de Besicovitch-

Eggleston, como 'clásico' en teoría geométrica de la medida. Encontrar la medida de Hausdorff del conjunto (mucho más pequeño) $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ también queda por resolver. Tenemos razones para pensar que ambos conjuntos tienen la misma medida $H^s(\mathcal{D})$, y éste es otro problema que se ha de resolver en el futuro. A nuestro juicio, todas estas cuestiones están relacionadas con propiedades profundas de leyes límite fuerte en teoría de probabilidad. En particular, encontrar la igualdad entre el conjunto $B_{\mathbf{p}}^{(\infty)}$ y el conjunto de códigos que cumplen una propiedad adecuada de tipo 'logaritmo iterado' podría resolver los problemas mencionados. Manuel Morán ha probado algunos resultados recientemente en esta dirección [Mor iv].

Mientras que el problema de la geometría de las medidas autosemejantes queda en cierto sentido cerrado en nuestro trabajo, no sucede así con la geometría frecuencial de E del capítulo 5. Es claro que hay muchas cuestiones interesantes por estudiar en el análisis frecuencial de los conjuntos autosemejantes. El profesor Pertti Mattila, por ejemplo, sugirió el problema de encontrar la dimensión de los subconjuntos de E que se obtienen fijando sólo alguna de las frecuencias asintóticas $\delta_i(\mathbf{i})$, i.e. $\hat{B}_{\mathbf{p}} = \{\pi(\mathbf{i}) : \delta_i(\mathbf{i}) = p_i, i \in M_1 \subset M\}$. También se pueden considerar los conjuntos más amplios $\bar{B}_{\mathbf{p}} = \{\pi(\mathbf{i}) : \limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_i(\mathbf{i}, k) = p_i, i \in M\}$, que H.G. Eggleston consideró en un contexto de teoría de números.

Extender las definiciones y resultados en esta memoria sobre los conjuntos de Besicovitch y otros conjuntos de tipo frecuencial al contexto de medidas asociadas a procesos estocásticos más generales, e.g. markovianos [BEH 89], es otro problema natural motivado por nuestro trabajo. En tal caso, la referencia de Billingsley [Bil 60, Bil 61] resulta imprescindible, que desarrolla un trabajo esencial precisamente en ese contexto.

Se puede dar una definición natural para los conjuntos de Besicovitch en el contexto de construcciones de Moran [EM 92] o de construcciones dirigidas por grafos [MW 88], que no necesitan estar 'especificadas' por semejanzas. Todo el programa de análisis frecuencial arriba propuesto está abierto en este tipo de construcciones.

Nos gustaría cerrar esta memoria con dos observaciones finales acerca de la discusión del preámbulo sobre la interacción entre probabilidad y teoría geométrica de la medida. Destacar, por una parte, la contribución esencial de las técnicas de probabilidad a nuestro trabajo: desde luego en la aplicación de leyes de límite fuerte como

la potente ley del logaritmo iterado; pero también (de manera menos obvia) en la técnica de 'travelling ball', por otra parte de inspiración puramente geométrica. En segundo lugar, insistir en que el inspirado trabajo de Billingsley propone un punto de partida para que la dimensión de Hausdorff desempeñe un papel relevante en probabilidad, como muestra el siguiente ejemplo. Considerar la familia de procesos estocásticos que consisten en el lanzamiento repetido de una moneda con probabilidad de cara $p \geq 1/2$. Si se hace la identificación usual del espacio de probabilidad del proceso $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con el intervalo unidad, se tiene del teorema 5.3.7 que el suceso Ω que consiste en haber obtenido en todo momento mayor número de caras que cruces tiene dimensión 1 y ν_p -probabilidad positiva de ocurrir si $p > 1/2$ (ver sección 5.3 para las definiciones). En el caso de la moneda 'justa' la medida del suceso Ω es nula, pero la dimensión sigue siendo 1, lo que se corresponde con que el hecho de que la $\nu_{1/2}$ -medida de Ω sea nula es poco robusto frente a la familia de estos procesos, i.e. en términos prácticos, el suceso Ω ocurre 'fácilmente' incluso para una moneda 'justa'. Así, la dimensión de Hausdorff-Billingsley matiza de modo inequívoco la posibilidad de ocurrencia de los eventos improbables.

Otra razón importante por la que la dimensión de Hausdorff-Billingsley puede resultar de interés está un poco alejada de los problemas que nos han ocupado aquí, pero merece un breve comentario: la dimensión de Hausdorff-Billingsley proporciona un concepto de dimensión asociado a un proceso estocástico e independiente de cualquier representación geométrica del mismo. Esto tiene un interés claro cuando se computa la dimensión (e.g. de correlación) de la medida invariante de un proceso estocástico en el análisis no-lineal de series temporales [MMR 95].

Referencias

- [And 92] L. Anderson, Recursive Construction of Fractals, *Ann. Academiae Sci. Fennicae A, Math. Dissertationes* **86**.
- [Ban 91] C. Bandt, Deterministic Fractals and Fractal Measures, *Lecture Notes of the School on Measure Theory and Real Analysis*, Grado, Italy, 1991.
- [BG 92] C. Bandt & S. Graf, Self-Similar Sets 7. A Characterization of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure, *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 995-1001.
- [Bar 88] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.
- [BEH 89] M. Barnsley, J.H. Elton & D.P. Hardin, Recurrent Iterated Function Systems, *Constr. Approx.* (1989) **5**, 3-31.
- [Bes 34] A.S. Besicovitch, On the Sum of Digits of Real Numbers Represented in the Dyadic System, *Math. Annalen*, **110** (1934), 321-30.
- [Bil 60] P. Billingsley, Hausdorff Dimension in Probability Theory, *Illinois J. Math.* (1960) **4**, 187-209.
- [Bil 61] P. Billingsley, Hausdorff Dimension in Probability Theory II, *Illinois J. Math.* (1961) **1961** **5**, 291-298.
- [Bil 78] P. Billingsley, *Probability and Measure Theory*, Wiley, New York, 1978.

- [CKN 82] **R. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg**, Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 771.
- [Car 66] **L. Carleson**, *Selected Problems in Exceptional Sets*, 1966, Van Nostrand, Princeton, NJ.
- [CM 92] **R. Cawley & R.D. Mauldin**, Multifractal Decompositions of Moran Fractals, *Adv. Math.* **92** (1992), 196–236.
- [Cut 86] **C. D. Cutler**, The Hausdorff Dimension Distribution of Finite Measures in Euclidean Spaces, *Canad. J. Math.* (1986) **38** (6) 1459–1484.
- [Cut 90] **C.D. Cutler**, Connecting Ergodicity and Dimension in Dynamical Systems, *Ergodic Theory Dyn. Syst.* (1990) **10**, 451–462.
- [Cut 91] **C.D. Cutler**, Some Results on the Behaviour and Estimation on the Fractal Dimensions of Distributions on Attractors, *J. Stat. Phys.* (1991) **62**, 651–708.
- [DGSH 92] **A. Deliu, J.S. Geronimo, R. Shonkwiler & D. Hardin**, Dimensions Associated with Recurrent Self-similar Sets, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110** (1991), 327–36.
- [ER 86] **J.-P. Eckmann & D. Ruelle**, Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617–656.
- [Edg 90] **G.A. Edgar**, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [EM 92] **G.A. Edgar & R.D. Mauldin**, Multifractal Decomposition of Digraph Recursive Fractals, *Proc. London Math. Soc.* **65** (1992), 604–628.
- [Egg 49] **H.G. Eggleston**, The Fractional Dimension of a Set Defined by Decimal Properties, *Quart. J. of Math. Oxford Ser.* **20** (1949), 31–6.

- [Fal 85] **K.J. Falconer**, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [Fal 90] **K.J. Falconer**, *Fractal Geometry*, Wiley, New York, 1990.
- [Fal 94] **K.J. Falconer**, The Multifractal Spectrum of Statistically Self-Similar Measures, *J. Prob. Theory* **7** (1994), 681-702.
- [Fel 68] **W. Feller**, *An Introduction to Probability Theory and its Applications (vol 1)*, Wiley, New York, 1968.
- [Fer] **H. Fernau**, Infinite Iterated Function Systems, preprint.
- [Fro 35] **O. Frostman**, Potential d'Equilibrie et Capacité des Ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Math. Semin.*, (1935) **3**, 1-118.
- [GMMR 93] **M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán y M. Reyes**, *Estructuras Fractales. Propiedades y Aplicaciones*, Labor, 1993.
- [Haa 87] **H. Haase**, Packing Measures on Euclidean Spaces, *Acta Universitatis Carolinae* **28** (2) (1987), 59-66.
- [Haa 88] **H. Haase**, Packing Measures on Ultrametric Spaces, *Studia Mathematica* **91** (1988), 189-203.
- [Haa 90] **H. Haase**, The Packing Theorem and Packing Measures, *Math. Nachr.* **146** (1990), 77-84.
- [Haa] **H. Haase**, A Survey on the Dimension of Measures, preprint.
- [Hau 18] **F. Hausdorff**, Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, **79** (1918), 157-179. (existe versión en inglés 'Dimensión and Outer Measures' en *Classics on Fractals*, G.A. Edgar ed., Addison-Wesley, 1993).
- [Hut 81] **J.E. Hutchinson**, Fractals and self similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), 713-47.

- [KT 61] **Kolmogorov & Tihomirov**, ϵ -Entropy and ϵ -Capacity of Sets in Functional Spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* (1961) **17**, 277-364.
- [LM 85] **F. Ledrappier & M. Misiurewicz**, Dimension of Invariant Measures for Maps with Exponent zero, *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **5** (1985), 595-610.
- [MM 88] **M.A. Martín and P. Mattila**, k -Dimensional Regularity Classifications for s -Fractals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **305** (1988), 293-315.
- [Mat] **P. Mattila**, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, in press.
- [MU] **R.D. Mauldin & M. Urbanski**, Dimension and Measures in Infinite Iterated Function Systems, preprint.
- [MW 88] **R.D. Mauldin & S.C. Williams**, Hausdorff Dimension in Graph-Directed Constructions, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1988) *to appear* **309**, 811-829.
- [MMR 95] **E. Mera, M. Morán & J.M. Rey**, Detection of Chaos in Time Series. An Application to Spanish Sea Swell, *Documento de Trabajo 9507, Facultad de Económicas, U.C.M.*, 1995.
- [Mor i] **M. Morán**, Hausdorff Measure of Infinitely Generated Self-Similar Sets, *Monast. fur Math.* (forthcoming)
- [Mor ii] **M. Morán**, Sufficient Conditions for Positive Hausdorff Measure in Infinite Self-Similar Sets, *unpublished*.
- [Mor iii] **M. Morán**, Self-Similar Sets Generated by Infinite Systems of Similitudes, *preprint*.
- [Mor iv] **M. Morán**, Normal Sequences and the Law of the Iterated Logarithm, *unpublished*.
- [Morn 46] **P.A.P. Moran**, Additive Functions of Intervals and Hausdorff Measure, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **42** (1946), 15-23.

- [Ose 68] V.I. Oseledec, A Multiplicative Ergodic Theorem. Liapunov Characteristic Exponents, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), 179-231.
- [Per 94] Y. Peres, The Self-Affine Carpets of McMullen and Bedford have Infinite Hausdorff Measure, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **116** (1994), 513-526.
- [Rag 78] M.S. Raghunathan, A Proof of Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem, *Israel J. Math.*, **32** (4) (1978) 356-362.
- [Ren 70] A. Renyi, *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [Rey 92] J.M. Rey, Sobre Algunas Dimensiones Fraccionarias, Trabajo de Investigación, U.C.M., Mayo 1992.
- [RT 61] C.A. Rogers & S.J. Taylor, Functions Continuous and Singular with respect to a Hausdorff Measure, *Mathematika*, **8** (1961), 1-31.
- [Rog 70] C.A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [Rud 79] W. Rudin, *Variable Real y Compleja*, Alhambra, 1979.
- [Rue 87] D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, 1987.
- [ST 88] X. Saint-Raymond & C. Tricot, Packing Regularity of Sets in n -Space, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **103** (1988), 133-145.
- [Sch 94] A. Schief, Separation Properties for Self-Similar Sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), 111-115.
- [Smo 67] M. Smorodinsky, Singular Measures and Hausdorff Measures, *Israel J. Math.* **7** (1969), 383-496.
- [Spe 89] D.W. Spear, Hausdorff, Packing, and Capacity Dimensions, Ph.D. thesis, University of North Texas, Denton, Texas, Austin, 1989.

- [Spe 92] **D.W. Spear**, Measures and Self-Similarity, *Adv. in Math.* **91**(2) (1992), 143-157.
- [Tay 86] **S.J. Taylor**, The Measure Theory of Random Fractals, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **100** (1986), 383-406.
- [TT 85] **S.J. Taylor & C. Tricot**, Packing Measure, and its Evaluation for a Brownian Path, *Trans. Amer. Math. Soc.* **288** (2) (1985), 679-699.
- [Tri 80] **C. Tricot**, Rarefaction Indices, *Mathematika* **27** (1980), 46-57.
- [Tri 82] **C. Tricot**, Two Definitions of Fractional Dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **91** (1982), 57-74.
- [Wal 82] **P. Walters**, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [Wic 92] **K.R. Wicks**, *Fractals and Hyperspaces*, Lecture Notes in Math. 1492, Springer-Verlag, 1992.
- [You 82] **L.-S. Young**, Dimension, Entropy and Liapunov Exponents, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **2** (1982), 109-24.

Manuel Morán & José Manuel Rey

Departamento de Análisis Económico

Universidad Complutense. Campus de Somosaguas

28223 Madrid. Spain.

e-mail address: ececo06@sis.ucm.es, ececo07@sis.ucm.es