

Grupos y Álgebras de Lie

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 2

ÁLGEBRAS DE LIE, GENERALIDADES

FECHA DE ENTREGA: 27/5

Los ejercicios a entregar están marcados con un asterisco.

- (1) Si $n \in \mathbb{N}$, definimos el *álgebra de Schrödinger* $\mathfrak{g}_n$, con base $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, z\}$ y corchete dado por

$$[\mathfrak{g}_n, z] = [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0 \quad \forall i, j,$$

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} z \quad \forall i, j.$$

Probar que es un álgebra de Lie. Encontrar su centro $Z(\mathfrak{g}_n)$. Describir $\mathfrak{g}_n/Z(\mathfrak{g}_n)$.

- (2) Sea $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_d$. Encontrar una fórmula (y probarla) para $\text{ad}_x^n(y) (= [x, [x, \dots [x, y]] \dots])$, con n equis. Observar que esta fórmula está en el álgebra asociativa $M_d(\mathbb{K})$. Más en general: para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cualquiera, expresar una fórmula similar en $U(\mathfrak{g})$, el álgebra envolvente.
- (3) Encontrar el centro de $\mathfrak{gl}_n$. Probar que, como álgebras de Lie, $\mathfrak{gl}_n = Z(\mathfrak{gl}_n) \oplus \mathfrak{sl}_n$.
- (*4) Recordar la definición del álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana como $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{K} \langle x, y \rangle$, $[x, y] = y$. Recordar la colección de módulos de $\tilde{\mathfrak{g}}$ $V_{n,\lambda}$, con base $\{v_0, \dots, v_n\}$ y acción dada por

$$y \cdot v_i = v_{i+1} \quad (\text{se considera aquí } v_{n+1} = 0.)$$

$$x \cdot v_i = (\lambda + i)v_i.$$

(a) Decir cuándo $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(V_{n,\lambda}, V_{n',\lambda'}) \neq 0$.

(b) Describir $V_{2,\lambda} \otimes V_{1,\mu}$.

- (5) Probar que $\mathfrak{o}_3$ es un álgebra simple. Probar que $\mathfrak{o}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Probar que $\mathfrak{o}_3(\mathbb{R}) \not\simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
- (*6) Probar que $\mathfrak{o}_4 \simeq \mathfrak{o}_3 \oplus \mathfrak{o}_3$.
- (7) Encontrar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sean nilpotentes pero $\mathfrak{g}$ no lo sea.
- (8) Sea $\mathfrak{t} = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid x_{ij} = 0 \quad \forall i > j\}$ el álgebra de matrices triangulares. Se define en $\mathfrak{t}$ la filtración

$$\mathfrak{t} = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n = 0,$$

donde $F_k = \{(x_{ij}) \mid x_{ij} = 0 \quad \forall j - i < k\}$.

(a) Probar que $[F_i, F_j] \subseteq F_{i+j}$.

(b) Encontrar el centro $Z(\mathfrak{t})$.

(c) Probar que $\text{nilrad}(\mathfrak{t}) = F_1 + Z(\mathfrak{t})$.

(d) Describir $\mathfrak{t}/\text{nilrad}(\mathfrak{t})$.

- (9) Sea $\mathfrak{n} = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid x_{ij} = 0 \quad \forall i \geq j\}$. Encontrar su centro.
- (10) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una representación, recordar que se define la forma bilineal t_ρ en $\mathfrak{g}$ por $t_\rho(x, y) = \text{tr}(\rho(x)\rho(y))$. Notar que es una forma bilineal simétrica. Probar que es invariante; es decir, que

$$t_\rho([x, y], z) + t_\rho(y, [x, z]) = 0.$$

Probar que el núcleo de esta forma es un ideal (NB: núcleo = $\{x \mid t_\rho(x, y) = 0 \quad \forall y\}$).

- (11) Describir la forma de Killing de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (NB2: forma de Killing = t_{ad}).
- (*12) Sean $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie. Se dice que $\mathfrak{g}$ *actúa en* $\mathfrak{h}$ si, como espacio vectorial, $\mathfrak{h}$ es una representación de $\mathfrak{g}$. Es decir, hay un morfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathfrak{h}}$. Se dice que *actúa por derivaciones* si el morfismo cae en $\text{Der}(\mathfrak{h})$. En otras palabras, si $x \cdot [y_1, y_2] = [x \cdot y_1, y_2] + [y_1, x \cdot y_2] \quad \forall x \in \mathfrak{g}, y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.
- (a) Probar que el *producto semidirecto* $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g}$, definido como $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ como espacio vectorial y con el corchete dado por

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2] + y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1, [y_1, y_2]) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{h}, y_1, y_2 \in \mathfrak{g}$$

da una estructura de álgebra de Lie. (**Sug:** una vez probado que es bilineal, para probar Jacobi alcanza con considerar los casos “3 elementos de $\mathfrak{h}$ ”, “2 elementos de $\mathfrak{h}$ y uno de $\mathfrak{g}$ ”, etc. Y dos de estos casos son inmediatos).

- (b) Si $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_V$ con V un espacio vectorial, observar que se puede considerar $\mathfrak{h} = V$ como álgebra abeliana y esto encaja en la definición anterior. Definimos $\text{aff}_n = \mathbb{K}^n \rtimes \mathfrak{gl}_n$. ¿Quién es aff_1 ?