Grupos y Álgebras de Lie

Primer cuatrimestre 2005
Práctica 3
Álgebras de Lie, generalidades
Fecha de entrega: ???

Los ejercicios a entregar están marcados con un asterisco.

(1) Sea W_n la representación irreducible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dim. $n+1$. Probar que W_n es la n-ésima potencia simétrica de W_1.

(2) Sean V, W dos $\mathfrak{g}$-módulos de dimensión finita. Recordar que, como espacios vectoriales, $\mathrm{Hom}(V,W) \simeq W \otimes V^*$.
   (a) Probar que el isomorfismo anterior es de $\mathfrak{g}$-módulos.
   (b) Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ coincide con el espacio de invariantes $(\mathrm{Hom}(V,W))^{\mathfrak{g}}$.

(3) Sea $\{e_1, \cdots, e_d\}$ una base del $\mathfrak{g}$-módulo V, y sea $\{e^1, \cdots, e^d\}$ la base dual. Probar que el elemento $\sum_{i=1}^d e_i \otimes e^i \in V \otimes V^*$ es $\mathfrak{g}$-invariante. Probar que este elemento no depende de la base elegida (**Sug:** mirarlo en $\mathrm{Hom}(V,V)$).

(4) Es $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.
   (a) Probar que $U(\mathfrak{g})$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la adjunta. Esto es, si $x \in \mathfrak{g}$ y $a \in U(\mathfrak{g})$ se toma $x \cdot a = xa - ax \in U(\mathfrak{g})$.
   (b) Probar que la multiplicación $m : U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, $a \otimes b \mapsto ab$ es un morfismo de módulos.
   (c) Probar que la inclusión de espacios vectoriales $\mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ es un morfismo de módulos (en $\mathfrak{g}$ se toma la acción adjunta).

(5) Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada es. Notamos con κ su forma de Killing, que induce una transformación lineal $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ por

$$\alpha(x)(y) = \kappa(x,y).$$

Probar que α es un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

(6) Dejemos a $\mathfrak{g}$ ser un álgebra de Lie semisimple ($\mathrm{car}\,\mathbb{K} = 0$). Sea $\{e_1, \cdots, e_d\}$ una base de $\mathfrak{g}$, y $\{e^1, \cdots, e^d\}$ su base dual. Vimos que κ, su forma de Killing, es no degenerada. Observar que esto es equivalente a que α, del ejercicio 5, sea un isomorfismo. Sea entonces $\{f_1, \cdots, f_d\}$ la base de $\mathfrak{g}$ dada por $f_i = \alpha^{-1}(e^i)$. Finalmente, sea el elemento $c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^d e_i f_i \in U(\mathfrak{g})$. Usando los ejercicios se puede probar "de manera conceptual" que $c_{\mathfrak{g}}$ está en el centro de $U(\mathfrak{g})$. Hacerlo. (**Def:** $c_{\mathfrak{g}}$ se llama "el Casimir" de $\mathfrak{g}$).

(7) Probar que el grupo de Weyl de tipo D_n se puede ver como el subrgupo de del grupo de Weyl de tipo B_n formado por los elementos con una cantidad par de cambios de signo.

(8) Sea W el grupo de Weyl de un sistema de raíces Δ, con descomposición en raíces positivas y negativas $\Delta_+ \cup \Delta_-$. Sea Σ su conjunto de raíces simples. Notamos con ℓ la longitud de un elemento de W en términos de los s_α con $\alpha \in \Sigma$.
   (a) Probar que $\ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2) - 2\#\{\beta \in \Delta_+ \mid w_1\beta \in \Delta_-, w_2^{-1}\beta \in \Delta_-\}$.
   (b) Si $\alpha \in \Delta$, probar que $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ si $w\alpha \in \Delta_-$ y $\ell(ws_\alpha) > \ell(w)$ si $w\alpha \in \Delta_+$.

(*9) Una vez hechos todos los ejercicios anteriores, decir con sinceridad cuánto tiempo se invirtió en hacerlos.