

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1+R} \left(\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S(1+R) + C_u - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} S_u \right) \\ &= \frac{1}{1+R} (pC_u + (1-p)C_d) \end{aligned}$$

donde

$$p = \frac{S(1+R) - S_d}{S_u - S_d}$$

C resulta ser un múltiplo de una combinación convexa de C_u y C_d , más precisamente con factor de corrección $\frac{1}{1+R}$.

Surgen dos preguntas:

1. ¿Puede representar p una probabilidad, esto es $0 \leq p \leq 1$?

Sabemos que no hay arbitraje sii

$$S_d < S(1+R) < S_u$$

Veamos ahora que no hay arbitraje sii

$$0 \leq p \leq 1$$

La desigualdad $S_d < S(1+R)$ es de esperar, de manera que se cumple.

Supongamos que $S(1+R) > S_u$. En tal caso podríamos construir un portafolio de arbitraje de la siguiente manera

$$\pi = \begin{cases} x \text{ bonos en posición long} \\ 1 \text{ acción en posición short} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi &= x \frac{1}{1+R} - S_d \\ \pi_u &= x - S_u \\ \pi_d &= x - S_d \end{aligned}$$

Eligiendo $x = S(1+R)$ se cumple que $\pi = 0$, $\pi_u > 0$ y $\pi_d > 0$. Esto prueba que $0 < p < 1$. En consecuencia, resulta tentador escribir

$$C = \frac{1}{1+R} VE(C_T).$$

Sin embargo, veremos más adelante que, si bien p puede pensarse como una probabilidad, no es la probabilidad de que suba o baje el precio del activo.

2. ¿Es efectivamente $p = \hat{p}$, de acuerdo a lo que hemos visto la clase pasada?

Escribamos

$$\begin{aligned} S &= p_1 S_u + p_2 S_d \\ \frac{1}{1+R} &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

Entonces

$$p_1 (1 + R) = \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \hat{p}_1$$

y

$$p_2 (1 + R) = \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \hat{p}_2 = 1 - \hat{p}_1$$

Luego

$$\begin{aligned} (1 + R) S &= p_1 (1 + R) S_u + (1 + R) p_2 S_d \\ &= \hat{p}_1 S_u + \hat{p}_2 S_d = \hat{p}_1 S_u + (1 - \hat{p}_1) S_d \\ &= \hat{p}_1 (S_u - S_d) + S_d \end{aligned}$$

y por lo tanto, despejando se obtiene la respuesta

$$\hat{p}_1 = \frac{(1 + R) S - S_d}{S_u - S_d} = p.$$

Multiperíodo (con derecho a ejercer en multiples pasos)

Ahora se registra las subas y bajas, en difirentes períodos de tiempo, esto origina una árbol binomial, que en principio podemos representar de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} & S_u & \dots \\ & S_u & \\ & S_{ud} & \dots \\ S & & \\ & S_{du} & \\ & S_d & \\ & S_{dd} & \dots \end{array}$$

Observación. Para una Call americana, el derecho se podrá ejercer en cualquier instante de tiempo t . Veremos que esto bajo la hipótesis del no pago de dividendos, no agrega información en términos de valores esperados. Nótese que la hipótesis del no pago de dividendo simplifica la situación, si bien no es realista en el caso de opciones sobre acciones.

Si asumimos que $S_u = Su$ y $S_d = Sd$ donde $u > 1 > d$ (factores que efectivamente hacen subir y bajar el precio de base respectivamente) entonces el arbol pierde ramas, pues por ejemplo $S_{ud} = S_{du}$.

$$\begin{array}{ccc} & S_u & \dots \\ & S_u & \\ & & \dots \\ S & & S_{ud} \\ & S_d & \\ & S_{dd} & \dots \end{array}$$

Supongamos además que hemos dividido el tiempo total T en n intervalos de igual longitud ΔT

$$T = n\Delta T$$

Reemplazamos la idea de un *retorno* R por una *tasa* r (libre de riesgo) de manera que en vez del factor $\frac{1}{1+R}$ se tendrá el factor $e^{-r\Delta t}$.

Observación.

El hecho de que la exponencial sea un carácter, esto es, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ tiene aquí su importancia.

Teniendo en cuenta que $S_u = Su$ y $S_d = Sd$ la *condición de no arbitraje*, que antes se enunciaba $S_u > S(1+R) > S_d$ ahora resulta ser

$$u > Se^{r\Delta t} > d$$

Además notemos que el cociente

$$\frac{Se^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = p$$

no depende de S . Esta propiedad es interesante y dice que la “probabilidad” p no depende directamente del precio del bien o valor sino que *es un parámetro intrínseco del activo*.

Veamos un ejemplo numérico para una Call europea.

Supongamos un strike $K = 105$, $u = 1,1$, $d = 0,9$ y $r = 7\%$ anual, con T semestres $\Delta T = \frac{1}{2}$

Además supongamos el precio base o actual de la acción es de $S = 100$.

En este caso el árbol es el siguiente

		121
		(16)
	110	
	10,4764	
100		99
(6,8597)		(0)
	90	
	(0)	
		81
		(0)

La “probabilidad” vale $p = 0,6781$.

Si consideramos una Put europea, la situación es diferente

		121
		(0)
	110	
	(1, 865)	
100		99
(4, 772)		(6)
	90	
	(11, 3885)	
		81
		(24)

Observación

Existe una relación entre el valor de la put y de la call. Conociendo el valor de la put se obtiene el de la call y viceversa

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

Esto se llama *paridad put-call*.

Como lo hemos mencionado anteriormente, una call americana permite ejercer el derecho a cada tiempo, aunque tratándose de un modelo discreto, en verdad en cada nodo. Se trata de hacer máximo entre 0 y $K - S_t$

$$P_t = \max\{0, K - S_t\}.$$

En una call es al revés

$$C_t = \max\{0, S_t - K\}$$

Es curioso que si no se paga dividendo, entonces el valor de una call europea y americana es el mismo $C_E = C_A$. Supongamos que se puede ejercer en tiempo t , dado que conviene, $S_t - K > 0$. Supongamos que sube a futuro T , con tasa libre de riesgo $e^{r(T-t)}$.

Ahora bien como el payoff esperado es $VE(S(T)) = S_t e^{r(T-t)} > S_t e^{r(T-t)} - K$, en realidad no conviene ejercer y el valor mejora si deja evolucionar. Más adelante veremos un argumento más preciso.

La paridad put-call (europea) puede escribirse

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Para $t = T$

$$\begin{aligned} C_T &= \max\{S_T - K, 0\} \\ P_T &= \max\{K - S_T, 0\} \end{aligned}$$

de manera que se verifica la igualdad

$$C_T - P_T = S_T - K$$

Ahora consideramos

$$\pi_t = \begin{cases} 1 \text{ call} & \text{en posición long} \\ 1 \text{ put} & \text{en posición short} \\ 1 \text{ unidad del activo} & \text{en posición short} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \pi_t &= C_t - P_t - S_t \\ \pi_T &= C_T - P_T = S_T - K - S_T = -K \end{aligned}$$

y suponiendo no arbitraje se obtiene

$$\pi_t = e^{-r(T-t)} \pi_T,$$

de donde se deduce el resultado.

Situación general

Supongamos en tiempo T , $n + 1$ estados posibles $T = n\Delta t$. Pongamos

$$S^j(T) = S_{u^j d^{n-j}} = S u^j d^{n-j}$$

con

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Entonces la “probabilidad” de que la variable aleatoria S tome el estado S^j en tiempo T es

$$P(S(T) = S^j(T)) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

de manera que usando el binomio de Newton, el valor esperado de acuerdo a esta probabilidad resulta ser

$$\begin{aligned} VE(S(T)) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} S u^j d^{n-j} = \\ &= S (pu + (1-p)d)^n. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$pu + (1-p)d = p(u-d) + d = e^{r\Delta t}$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que $T = n\Delta t$

$$VE(S(T)) = S(pu + (1-p)d)^n = Se^{rn\Delta t} = Se^{rT}$$

el “valor esperado” es proporcional al valor de base y la proporción depende de la tasa de interés.

¿Qué pasa si hacemos que $\Delta t \rightarrow 0$?

Supongamos el mismo esquema call europea con strike K

$$C_j = C_{u^j d^{n-j}} = \max\{Su^j d^{n-j} - K, 0\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} VE(C(T)) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} C_j = \\ &= \sum_{j=n_0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} C_j \end{aligned}$$

donde

$$n_0 = \min\{j : C_j > 0\}$$

Luego

$$\begin{aligned} VE(C(T)) &= \sum_{j=n_0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - K) \\ &= S \sum_{j=n_0}^n \binom{n}{j} (pu)^j ((1-p)d)^{n-j} - KP(U \geq n_0) \end{aligned}$$

donde U es una variable aleatoria con distribución binomial, de manera que $VE(U) = np$ y $Var(U) = np(1-p)$.

Por el teorema central del límite podemos aproximar la binomial por una distribución normal y obtenemos que

$$P(U \geq n_0) \approx P\left(Z \geq \frac{n_0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Ejercicio.

Hallar el valor n_0 para el caso de que $u = \frac{1}{d}$.

Existen dos componentes en el esquema del *paseo al azar* que hemos desarrollado para el comportamiento del activo.

Uno *determinístico* (gobernado por la tasa libre de riesgo) y otro *probabilístico* (debido a las irregularidades o contingencias del mercado, a las que nos referiremos globalmente como la *volatilidad*).

El componente determinístico podemos expresarlo de la siguiente manera

$$\frac{dS}{dt} = \mu S$$

o bien

$$dS = \mu S dt$$

El componente estocástico, en donde aparece la volatilidad, introduce “un ruido” en el gobierno del sistema, que hace la trayectoria sea del tipo fractal.

0.0.1 Procesos de Wiener (movimiento Browniano).

Vamos a comenzar de un modo intuitivo, suponiendo un paseo al azar con probabilidad igual a $\frac{1}{2}$.

En un eje disponemos del tiempo $t \in [0, T]$ y en el otro de la posición $x \in [-X, X]$. Existe una relación entre el paso en t y en x , que más adelante especificaremos.

Intuitivamente, en un *proceso de Markov* no hay memoria, “sólo el presente importa”.

Para cada $j = 1, 2, \dots, n$ sea

$$u_{k,j} = P(x_k = j).$$

donde el subíndice k representa el tiempo y j la posición.

Recordemos que si $P(B) \neq 0$ se define la probabilidad condicional del evento A dado que ocurrió el evento B de la siguiente manera

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A la posición j en tiempo $k+1$ pudimos haber llegado sólo desde la posición $j-1$, o bien j en tiempo k , de manera que se tiene

$$u_{k+1,j} = \frac{1}{2}(u_{k,j} + u_{k,j-1})$$

Escribimos esto de manera conveniente

$$u_{k+1,j} = \frac{1}{2}[(u_{k,j+1} - u_{k,j}) - (u_{k,j} - u_{k,j-1})] + u_{k,j}$$

o bien

$$u_{k+1,j} - u_{k,j} = \frac{1}{2}[(u_{k,j+1} - u_{k,j}) - (u_{k,j} - u_{k,j-1})]$$

Si escribimos

$$u_{k,j} = u(t_k, x_j)$$

se tiene que

$$u(t_{k+1}, x_j) - u(t_k, x_j) = \frac{1}{2} [(u(t_k, x_{j+1}) - u(t_k, x_j)) - (u(t_k, x_j) - u(t_k, x_{j-1}))]$$

Consideremos Δt , y Δx de forma tal que $X = n\Delta x$, $T = n\Delta t$ y por lo tanto $\frac{x}{\Delta x} = \frac{T}{\Delta t}$. Entonces multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{\Delta t}$ se tiene

$$\frac{1}{2\Delta t} [(u(t_k, x_{j+1}) - u(t_k, x_j)) - (u(t_k, x_j) - u(t_k, x_{j-1}))]$$

Si hacemos que $\Delta t \rightarrow 0$ el primero de los términos converge a $\partial_t(u)$ pero: ¿qué pasa con el segundo? Si suponemos que

$$\Delta t \approx (\Delta x)^2$$

entonces teniendo en cuenta que $\Delta t = \frac{T\Delta x}{X}$

$$\frac{1}{2\Delta t} = \frac{X}{2T\Delta x}$$

y distribuyendo se ve que el segundo término converge a $\partial_{xx}(u)$. De esta forma obtuvimos a partir de los paseos al azar una versión discreta de la ecuación del calor

$$\partial_t(u) = \frac{1}{2}\partial_{xx}(u)$$

A partir de las observaciones anteriores, podemos considerar el paseo al azar con paso $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$, es decir:

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j \pm \sqrt{\Delta t} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Veamos que el valor esperado al cabo de n pasos es cero. Las variables aleatorias $x_{j+1} - x_j = \pm\sqrt{\Delta t}$ son independientes entonces

$$VE(x_n) = VE\left(\sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} VE(x_{j+1} - x_j) = 0$$

y

$$Var(x_n) = \sum_{j=0}^{n-1} Var(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t = n\Delta t = T$$

Comentario y observación.

Consideramos un espacio muestral Ω y una Φ , σ -álgebra sobre Ω (colección de subconjuntos de Ω , que contiene al vacío, es cerrado por complementos y uniones numerables). Todo elemento de Φ se llama evento. Se dice que P es una función de probabilidad si es una función de conjuntos $P : \Phi \rightarrow [0, 1]$ que satisface $P(\Omega) = 1$ y es σ -aditiva (esto es, si $\{U_j\}_{j \geq 1} \subset \Phi$ es una colección de eventos disjuntos de tomados de a dos, entonces $P(\cup_{j=1}^{\infty} U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(U_j)$). La terna (Ω, Φ, P) se llama espacio de probabilidad. Decimos que x es una variable aleatoria si es una función Φ -medible $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

La varianza de una variable aleatoria es un concepto central para el estudio de volatilidad y se define en términos de la esperanza $E(X) = VE(X)$, o valor esperado.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2 - 2E(X)X + E^2(X)) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

Si las variables aleatorias X e Y son independientes y $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$Var(aX + Y) = a^2 Var(X) + Var(Y)$$

Volvamos a nuestros paseos al azar. Si interpolamos linealmente los puntos $\{x_j\}_{1 \leq j \leq n-1}$ obtenemos segmentos

$$x(j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} (t - t_j) + x_j$$

para $t_j \leq t \leq t_{j+1}$.

Este es un proceso *markoviano*, pues se verifica:

i) $\forall a > 0$, $\{x(t_k + a) - x(t_k)\}$ es independiente del pasado $\{x(s) : s \leq t_k\}$

Por otra parte, de lo anterior se deduce:

ii)

$$\begin{aligned} E(x(t_k + a) - x(t_k)) &= 0 \\ Var(x(t_k + a) - x(t_k)) &= a \end{aligned}$$

Observación.

Si $\Delta t \ll 1$ entonces $x \approx N(0, \sqrt{a})$ (distribución normal, con media 0 y varianza a), y por lo tanto

$$P(x(t+a) - x(t) \geq y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2a}} dt$$

Esto se debe al Teorema Central del Límite, que garantiza que si N es grande, la distribución se aproxima por una gaussiana. La idea será pensar un modelo de la forma

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

El valor σ , asociado a la varianza, será la volatilidad. Si $\sigma = 0$ el modelo es determinístico. Los parámetros μ y σ dependen del activo, y se deben estimar. Para ello generalmente se toma como estadístico la varianza muestral, a partir de una determinada cantidad de valores históricos del activo.