Movimiento Browniano o proceso de Wiener

Se dice que $Z[\cdot]$ es un proceso de Wiener o movimiento Browniano si Z es una función definida en algún intervalo $I = [0, T]$ (eventualmente puede ser $T = +\infty$), con las siguientes propiedades

- i) $Z(0) = 0$
- ii) $\forall t, \forall a \geq 0$ la variable aleatoria $Z[t+a] - Z[t]$ es independiente de $\{Z[s] : 0 \leq s < t\}$
- iii) $\forall t, \forall a > 0$

$$Z[t+a] - Z[t] \sim N(0, \sqrt{a})$$

Observación.

1. La proyección de Z sobre la coordenada t , $Z[t]$ es una variable aleatoria para todo $t \in I$.

En este sentido se dice que $\{Z[t]\}_{t \in I}$ es un proceso estocástico.

2. La propiedad ii) dice que el proceso es independiente de su historia.

3. Existen procesos que son movimientos Brownianos, pero no es trivial su demostración. Una de las demostraciones es constructiva y recurre a una base completa de $L^2(I)$.

4. Se puede probar que con probabilidad uno Z no es diferenciable en ningún intervalo $[t, t+a]$.

Veamos una explicación (heurística) de este último hecho. Para esto definimos el importante concepto de

0.0.1 Variación cuadrática.

Dado el intervalo $[0, T]$ consideramos una partición $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Sea $\|\pi\| = \max\{|t_{i+1} - t_i| : 0 \leq i \leq n\}$. Definamos

$$\begin{aligned} Z_i &= Z[t_i] \\ \Delta Z_i &= Z[t_{i+1}] - Z[t_i] \end{aligned}$$

y la variación de Z asociada a la partición π como la suma

$$V_\pi(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta Z_i)^2$$

Se define la variación cuadrática de Z sobre el intervalo $[0, T]$ como

$$VC(Z) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} V_\pi(Z)$$

cuando dicho límite existe.

Se puede probar con todo rigor que dicho límite es T con probabilidad 1, y si consideramos la variación cuadrática sobre el intervalo $[t, t+a]$ entonces el límite es a .

Veamos el esquema que puede usarse para la prueba. Sabemos que las variables aleatorias ΔZ_i son independientes y con distribución $N(0, \sqrt{\Delta t_i})$.

Como

$$\Delta t_i = Var(\Delta Z_i) = E((\Delta Z_i)^2) - \underbrace{[E(\Delta Z_i)]^2}_{=0} = E((\Delta Z_i)^2)$$

Tomando esperanza sobre la suma

$$E \left[\sum_{i=0}^{n-1} ((\Delta Z_i)^2) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} E [((\Delta Z_i)^2)] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = T$$

Ahora se puede usar convenientemente la desigualdad de Chebychev para obtener el resultado.

Observación.

1. Esto demuestra que Z no puede ser diferenciable, puesto que en tal caso su variación cuadrática debiera ser 0. Esto es una consecuencia del teorema del valor medio. Dada una partición π del intervalo $[0, T]$, si f es diferenciable se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^2 f_i \leq \max\{\Delta f_i : 0 \leq i \leq n-1\} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f_i \leq \\ &\leq \max\{\Delta f_i : 0 \leq i \leq n-1\} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) \Delta t_i \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Un movimiento Browniano tiene la propiedad de autosimilaridad, propia de los fractales; se relaciona con el hecho de su invariancia por reescalamiento. Sea

$$W[t] = kZ[\lambda t]$$

con Z proceso Browniano en $[0, T]$. Observamos que para cualquier k se cumplen los puntos i) y ii) de la definición de movimiento Browniano. Pero para que W sea efectivamente un movimiento Browniano necesitamos que

$$Z[\lambda t + \lambda a] - Z[\lambda t] \sim N(0, \sqrt{\lambda a})$$

luego debemos tomar $K = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ para compensar

$$\frac{Z[\lambda t + \lambda a] - Z[\lambda t]}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0, \sqrt{\lambda a})$$

Recordemos que nuestro modelo para el retorno del precio del activo, tiene una componente determinística y otra estocástica

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$$

Si el modelo fuera

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

entonces no existe “ruido” (en nuestro contexto, volatilidad) y por tanto se determina de manera única si se conoce el valor de base (la condición inicial)

$$S_T = S_t e^{\mu(T-t)}$$

El componente σdZ es el que introduce el efecto fractal en la trayectoria. Pero observemos que no hemos definido, en absoluto, qué significa dZ . Más precisamente, daremos una definición de “integral estocástica”. Como motivación pensemos en la equivalencia que existe, para el modelo determinístico, entre una ecuación diferencial y su integración, es decir

$$dS = \phi(t, S(t)) dt$$

es equivalente a

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \int_t^{t+\Delta t} \phi(\xi, S(\xi)) d\xi$$

Definición. Integral de ITO. Sea $f = f(t, Z)$ con $t \in [0, T]$ una función diferenciable y Z movimiento Browniano en $[0, T]$.

Consideremos la partición

$$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

con $\|\pi\| = \max\{t_{i+1} - t_i : 0 \leq i \leq n\}$.

Asociada a cada partición π , definimos la suma de variables aleatorias

$$S_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, Z(t_i)) \Delta Z_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, Z_i) \Delta Z_i$$

donde como antes

$$\Delta Z_i = Z_{i+1} - Z_i = Z(t_{i+1}) - Z(t_i)$$

En el caso de que exista el

$$\lim_{\pi \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, Z_i) \Delta Z_i$$

diremos que f es una *función Ito-integrable* y escribimos

$$\lim_{\pi \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, Z_i) \Delta Z_i = \int_0^T f(t, Z(t)) dZ[t]$$

Ejemplo.

1. Consideremos $f(t, Z) = 1$. En este caso y sólo en este caso se tiene

$$\int_0^T dZ[t] = Z[T] - Z[0] = Z[T]$$

En general no vale la “regla de Barrow”.

2. Sea $f(t, Z) = Z$. Consideremos la partición

$$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

y calculemos la suma

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \Delta Z_i &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_i (Z_{i+1} - Z_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_{i+1} (Z_{i+1} - Z_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2 \end{aligned}$$

Observación.

La variación cuadrática aparece cuando pasamos al límite en el segundo sumando del último término.

Ahora reescribimos el primer término, telescopizando

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \Delta Z_i &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_{i+1} (Z_{i+1} - Z_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1}^2 - Z_i^2) - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i (Z_{i+1} - Z_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1}^2 - Z_i^2)}_{Z^2[T]} - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \Delta Z_i - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2 \\ &= Z^2[T] - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \Delta Z_i - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2 \end{aligned}$$

de manera que reagrupando los términos convenientemente

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \Delta Z_i = Z^2[T] - \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{i+1} - Z_i)^2$$

Finalmente pasando al límite

$$\int_0^T Z dZ [t] = \frac{Z^2 [T]}{2} + \frac{T}{2}$$

Observación.

Existe una versión “estocástica” del teorema fundamental del cálculo: se trata del lema de Ito.

Veremos un caso particular

1. *Un caso particular del Lema de Ito*

Veamos heurísticamente la justificación del resultado anterior. Sea Z un proceso Browniano, y F una función sólo de Z , que no depende explícitamente de t .

Si pudiéramos desarrollar a F por Taylor, se tendría

$$F(Z + \Delta Z) - F(Z) = F'(Z) \Delta Z + \frac{1}{2} F''(Z) \Delta Z^2 + R_2$$

donde R_2 es la función resto correspondiente.

Sabemos que para que sea un movimiento Browniano Z debe satisfacer que

$$(\Delta Z)^2 \approx \Delta t$$

En particular esto valdrá para cualquier incremento asociado con una partición π

$$\begin{aligned} F(Z(T)) - F(Z(0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} (F(Z_{i+1}) - F(Z_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F'(Z_i) \Delta Z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} F''(Z_i) (\Delta Z_i)^2 + R_2 \end{aligned}$$

Si pasamos al límite cuando $\|\pi\| \rightarrow 0$ y pudiéramos asegurar que $R_2 \rightarrow 0$, lo cual no es evidente, tendríamos el siguiente resultado,

$$F(Z[T]) - F(Z[0]) = \int_0^T F'(Z[\xi]) dZ[\xi] + \frac{1}{2} \int_0^T F''(Z[\xi]) d\xi$$

donde la primera es una integral estocástica y la segunda una integral determinística (usual).

Notemos que esto es lo que efectivamente ocurre en el ejemplo anterior con

$$F(t, Z) = \frac{Z^2}{2}$$

¿Qué versión necesitamos para nuestro modelo del retorno del activo? En primer lugar, consideremos la ecuación integral del modelo

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mu S(\xi) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} \sigma S(\xi) dZ[\xi]$$

la primera es una integral usual, la segunda determinística.

Ahora damos una versión del lema de Ito apropiada al proceso

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ.$$

2. *Lema de Ito.*

Si $F = F(S, t)$ es suave entonces

$$dF = \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dZ + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt$$

Observación

El primer término es estocástico, el segundo determinístico.

Explicación. Nuevamente optamos por dar la idea heurística que muestra los detalles que hay que tener en cuenta en una demostración rigurosa. La mayoría de los textos de finanzas, presentan sólo la idea y sólo en textos de cálculo estocástico, se hace la demostración rigurosa. Otra vez emplearemos “Taylor”:

$$\begin{aligned} & F(S + dS, t + dt) - F(S, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial S}(S, t) dS + \frac{\partial F}{\partial t}(S, t) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S, t) dS^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial S}(S, t) dS dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(S, t) dt^2 \right) + R_2 \end{aligned}$$

Pasando al límite el resto tiende a cero y algunos términos de mayor orden también. Para tener idea del por qué tengamos presente que

$$(dZ)^2 \approx dt$$

Ahora, siendo $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$, entonces

$$dS^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + 2\mu\sigma S dt dS + \sigma^2 S^2 dZ^2$$

El último de los términos es el único que “sobrevive”.

Luego reemplazando dS^2 como corresponde

$$\begin{aligned} & F(S + dS, t + dt) - F(S, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial S}(S, t) dS + \frac{\partial F}{\partial t}(S, t) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S, t) \sigma^2 S^2 \right) dt + R_2 \\ &= \frac{\partial F}{\partial S}(S, t) (\mu S dt + \sigma S dZ) + \frac{\partial F}{\partial t}(S, t) dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S, t) \sigma^2 S^2 \right) dt + R_2 \\ &= \sigma S \frac{\partial F}{\partial S}(S, t) dZ + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(S, t) + \mu S \frac{\partial F}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S, t) \sigma^2 S^2 \right) dt + R_2 \end{aligned}$$

y en el límite se obtiene el resultado □.

Una aplicación del lema.

$$F(S, t) = \ln(S)$$

Estamos en el caso en que F no depende explícitamente de t . Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2},$$

y de acuerdo al lema, (reemplazando y simplificando)

$$dF = \sigma dZ + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt$$

Sabemos que los incrementos se comportan como normales, de manera que teniendo en cuenta la propiedad del logaritmo

$$F(S_T) - F(S_t) = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

En cada Δt , $\sigma\Delta t$ mide el desvío del logaritmo del retorno.

Observación

1. Esta elección de F no es ingenua, veremos su utilidad, más adelante.
2. La volatilidad σ puede ser estimada a partir de valores históricos. Supongamos que tenemos $S_1, \dots, S_{N+1}$ mediciones obtenidas en intervalos de tiempos equiespaciados Δt .

Sea $S(t_i) = S_i$ el valor de la acción en tiempo t_i y consideremos

$$u_i = \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

Un estimador insesgado de la varianza es

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2$$

3. No interesa estimar la media.
4. En el modelo binomial, supuesto el no arbitraje se tenía

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

o bien

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}$$

Recordemos en primer lugar la distribución

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

Por otro lado tengamos presente que (ver ejercicio propuesto en P.Wilmott)

$$\text{Var}(S_{t+\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

Finalmente calculemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{t+\Delta t}) &= E(S_{t+\Delta t}^2) - E^2(S_{t+\Delta t}) \\ &= p(S_t u)^2 + (1-p)S_t d^2 - (S_t e^{r\Delta t})^2 \end{aligned}$$

Para que efectivamente haya coherencia ambas ecuaciones (0.0.1) y (1) deben coincidir.

$$\begin{cases} pu^2 + (1-p)d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \\ pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \end{cases}$$

El sistema es indeterminado.

Ejercicio.

- i) Se propone calcular u y d para $p = \frac{1}{2}$.
- ii) Calcular p para el caso en que $u = \frac{1}{d}$.