Modelo Continuo.

Recordemos la ecuación que modela el precio de un activo “riesgoso”:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

El término $\sigma S dZ$ representa la parte estocástica.

Para valuar una opción sobre dicho activo, consideremos el portfolio

$$\pi = \begin{cases} \Delta & \text{unidades del activo en posición long.} \\ 1 & \text{opción en posición short.} \end{cases}$$

Para cada (S, t) el valor de la opción es $V(S, t)$, y entonces el portfolio vale:

$$\pi = \Delta S - V$$

Podemos diferenciar, sustituir dS y escribir a dV de acuerdo al lema de Ito

$$\begin{aligned} d\pi &= \Delta dS - dV = \Delta (\mu S dt + \sigma S dZ) - dV = \\ &= \Delta (\mu S dt + \sigma S dZ) - \left[\sigma \frac{\partial V}{\partial S} S dZ + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \right] \end{aligned}$$

Con el objetivo de eliminar la parte estocástica dZ , elegimos

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$$

y obtenemos

$$d\pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Observación. Para mantener este portfolio se debería comprar y vender en forma continua.

Si se asume que no hay arbitraje, entonces

$$\frac{d\pi}{\pi} = r dt$$

Entonces

$$\pi r dt = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

y recordando que $\pi = \Delta S - V$, obtenemos:

$$Sr \frac{\partial V}{\partial S} - Vr = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)$$

De esta forma resulta la llamada *ecuación de Black-Scholes* (B-S)

$$rV = Sr \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Observaciones

1.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

es el valor del “hedged portfolio”.

2. La ecuación es parecida a la del calor salvo el signo. Se dice en tal caso que es *antidifusiva*, es decir se mira con el tiempo “hacia atrás”.

Ejemplos sencillos.

1. Si V no depende de S entonces $Sr \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$ y el modelo queda

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t}$$

de manera que el valor en T resultará ser

$$V(T) = e^{r(T-t)} V(t)$$

2. *Contrato forward.*

“X compra a Y una unidad de cierto activo S a precio K en tiempo T ”. A diferencia de la opción, X está obligado a comprar.

El payoff será entonces $S_T - K$. Es fácil ver (ejercicio) que el valor al tiempo t es

$$V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Veamos que satisface el modelo de B-S. En este caso

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 1; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = Kre^{-r(T-t)}$$

de manera que

$$\begin{aligned} rV - Sr \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ = rV - Sr - Kre^{-r(T-t)} = rV - r(S - Ke^{-r(T-t)}) = 0 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales y de borde.

Para una Call europea el modelo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} rC = Sr \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\ C(S, T) = \max(S - K, 0) \\ C(S, t) \sim S \text{ si } S \rightarrow \infty \\ C(0, t) = 0 \end{array} \right.$$

Para una Put europea el modelo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} rP = Sr \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \\ P(S, T) = \max(S - K, 0) \\ P(S, t) \sim 0 \text{ si } S \rightarrow \infty \\ P(0, t) = K \end{array} \right.$$

Soluciones del modelo B-S

Vamos a trabajar, por ahora, con una call europea.

$$\left\{ \begin{array}{l} rC = Sr \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\ C(S, T) = \max(S - K, 0) \end{array} \right.$$

Consideremos en primer lugar el cambio de variable

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)$$

y luego la sustitución de Euler

$$S = Ke^x$$

de manera que

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

Entonces

$$V(x, \tau) = \frac{1}{K} C(S, t)$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\frac{2}{K\sigma^2} \frac{\partial C}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial S} S \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial C}{\partial S} S \right] = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}$$

Reemplazando queda

$$-\frac{\sigma^2}{2} K \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 K \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right] + rK \frac{\partial V}{\partial x} = rKV$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2r}{\sigma^2} V \\ V(x, 0) = \frac{1}{K} C(S, T) = \frac{1}{K} \max\{S - K, 0\} = \max\{e^x - 1, 0\} \end{array} \right.$$

4

Ahora proponemos que la solución sea de la forma

$$u(x, \tau) = e^{kx+l\tau} V(x, \tau)$$

entonces derivando y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 - 2k\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(l - \frac{2r}{\sigma^2} + k^2 - k \left(\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\right)\right) u = 0$$

Ahora elegimos

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right),$$

y

$$l = (1 + k)^2$$

De esta forma se anulan los dos últimos términos y nos queda la ecuación del calor

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

donde

$$u_0(x) = e^{kx} \max\{e^{x-1}, 0\} = \max\{e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x}, 0\}$$

Recordemos: que la *solución de la ecuación del calor* tiene la forma:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

Si hacemos el cambio de variable

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}; \quad dy = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} ds$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

donde como antes

$$u_0(x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x}, 0\}$$

Entonces $u_0 \neq 0$ si

$$e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x} > e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x}$$

vale decir, si y sólo si

$$x > 0$$

$$x + \sqrt{2\tau}y > 0; \text{ es decir } y > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$

Luego

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left[e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)(x+\sqrt{2\tau}y)} \right] e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(x+\sqrt{2\tau}y) - \frac{y^2}{2}} dy \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)(x+\sqrt{2\tau}y) - \frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Calculamos I_1 completando cuadrados

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\alpha+1}{2}\sqrt{2\tau}\right)^2 + \frac{(\alpha+1)^2}{4}\tau} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x + \frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\alpha+1}{2}\sqrt{2\tau}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = N(d_1)$, en donde $N = N(0, 1)$, podemos escribir

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x + \frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau} N(d_1)$$

y de manera análoga para I_2

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x + \frac{1}{4}(\alpha-1)^2\tau} N(d_2)$$

donde

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\alpha-1}{2}\sqrt{2\tau}$$

Luego

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= I_1 - I_2 \\ &= e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)x + \frac{1}{4}(\alpha+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x + \frac{1}{4}(\alpha-1)^2\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación el obtenemos la ecuación de B-S

$$\begin{aligned} C(S, t) &= KV(x, t) = Ke^x N(d_1) - Ke^{-r\alpha} N(d_2) \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

Ejercicio.

Hacer la misma cuenta para una Put y verificar la paridad put-call.

Observaciones.

1. A partir de

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

observamos que si $\sigma \rightarrow 0$, es decir si la volatilidad tiende a desaparecer, entonces si $S \geq K$ se tiene que $d_1, d_2 \rightarrow +\infty$, en el límite obtenemos una expresión determinística

$$C(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Si $S < K$ se tiene que $d_1, d_2 \rightarrow -\infty$ y entonces $C \rightarrow 0$.

2. Cálculo de Δ :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Teniendo en cuenta que

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

se tiene que

$$\frac{\partial d_{1,2}}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Veamos que

$$SN'(d_1) + Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0$$

Como

$$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

entonces

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)}$$

Ahora calculamos $d_1^2 - d_2^2$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= \frac{2 \ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t} \\ d_1 - d_2 &= \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Luego

$$-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2) = -\frac{1}{2} \left[2 \ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2r(T-t) \right]$$

y entonces se obtiene el resultado buscado.

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{K}{S} e^{-r(T-t)}.$$

En consecuencia,

$$\Delta = N(d_1).$$

□