Algunos comentarios sobre Black-Scholes

1. Volatilidad implícita. Supongamos que tenemos una call europea sobre un activo que no paga dividendos. El modelo de B-S

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} = rC$$

sirve para evaluarla.

En este caso,

$$C(S, T) = (S - K)^+ = \max\{S - K, 0\}$$

y podemos suponer que en verdad C es una función de S, t, K y T

$$C = C(S, t, K, T)$$

Generalmente se asume que el mercado “sabe” cuál es el “precio justo” de una opción; más precisamente, se supone que los precios se ajustan de forma tal que se mantengan próximos al punto de equilibrio. Suponiendo que los valores actuales que se dan en el mercado son “verdaderos” se puede obtener una función $C^*(K, T)$. Si el modelo de B-S fuera correcto debería ocurrir que

$$C(S, t, K, T) = C^*(K, T)$$

Es razonable que se conozca r , pues se toma como referencia la tasa de un bono “libre de riesgo”. Más difícil es conocer la volatilidad, σ . Supongamos que se conocen r y σ entonces en tal caso podemos resolver la ecuación anterior.

También podemos razonar al revés; suponemos que la relación anterior es verdadera y estimamos σ para que el modelo de B-S sea correcto.

Este procedimiento nos permite calcular lo que se llama la *volatilidad implícita*, que consiste en estimar a partir de los valores del mercado, el valor del parámetro σ que hace a B-S correcto.

Hay que observar que la estimación es puntual, de manera que el valor estimado $\sigma = \sigma(S, t)$ cambia con el tiempo.

Observación

Para una call europea sobre un activo con dividendos (discretos) existe una versión de B-S con condiciones de salto. También hay una versión para dividendos continuos.

2. Se pueden estimar otros parámetros llamados *Greeks*.

¿Qué cantidad de activo se debe comprar o vender para mantener el portfolio libre de riesgo?. Esto se relaciona con la estimación de

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

y mide el costo de ese mantenimiento protegiendo al portfolio frente a las fluctuaciones del activo.

Otro parámetro de interés es

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

que mide la variación de Δ con respecto al precio del activo.

Observación

Si el modelo incluye dividendos y costo de transacción entonces Γ es un parámetro que da información relevante.

Otro parámetro de interés es

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

el decaimiento del valor en el tiempo.

El parámetro θ tiene signo contrario a Γ . Para verlo supongamos que la tasa de riesgo es cero $r = 0$ entonces de acuerdo al modelo de B-S tendremos (el argumento se puede hacer más preciso mediante un cambio de variable):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

de manera que

$$\theta + \Gamma = 0$$

¿Qué mide θ ? θ mide como varia V en el tiempo, dejando constante el precio del activo.

Otro parámetro es la Vega:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

que representa la variación del precio respecto de la volatilidad. Otro es

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r},$$

que mide la variación del precio del activo respecto de la tasa libre de riesgo. Este último parámetro es relevante en el caso de los mercados en los que la tasa fluctúa significativamente.

Opciones americanas

En estas opciones importa el camino que realice el activo, pues se tiene el derecho de ejercer en todo momento. Hemos visto que una opción americana, sin dividendos no vale más que una europea. Ahora podemos dar otra justificación.

Construimos el portfolio

$$\pi = \begin{cases} 1 \text{ opción en posición long} \\ 1 \text{ unidad de activo en posición short} \\ ke^{-r(T-t)} \text{ bonos en posición long} \end{cases}$$

Si ejerzo en t , para una call $S > K$, (de lo contrario no se ejerce) tendremos

$$S - K + Ke^{-r(T-t)} - S < 0$$

es decir que el portfolio ejercido es negativo.

En cambio si mantengo la opción sin ejercer hasta T , se tiene que

$$\max\{S_T - K, 0\} + K - S = \begin{cases} 0 & \text{si } S \geq K \\ K - S (> 0) & \text{si } S < K \end{cases}$$

Esto muestra que conviene ejercer en tiempo final T . Recordemos que este resultado vale para call sobre un activo sin dividendos.

Ahora bien, una put americana vale más que una europea, siempre. En este caso el payoff es

$$(K - S)^+ = \max\{K - S; 0\}$$

Afirmación:

Debe ocurrir que

$$V(S, t) \geq \max\{K - S; 0\}$$

Esto se relaciona con el problema del obstáculo y el argumento es el de no arbitraje.

Supongamos que no ocurre, es decir existe t tal que $0 \leq V(S, t) < \max\{K - S; 0\}$

En tal caso $\max\{K - S; 0\} = K - S$. Entonces consideremos la siguiente estrategia: Compro una unidad de activo y una opción que la ejerzo inmediatamente (es decir, la compro para ejercerla). En tal caso estoy pagando $S + V$ y recibo K . Entonces la ganancia neta es $K - (S + V) > 0$ (por hipótesis). Esto muestra que hay arbitraje y se prueba la afirmación.

Esto da lugar al tratamiento de los *problemas de obstáculo*.

Supondremos que

1. V está restringida inferiormente

$$V(S, t) \geq \max\{K - S; 0\}$$

2. $V, \frac{\partial V}{\partial S}$ continuas (vale decir, que el contacto entre V y el obstáculo sea de primer orden).

En este caso el modelo de B-S se sustituye por una *inecuación diferencial*

La idea es que mientras $V > \max\{K - S; 0\}$ se cumple la ecuación de B-S y por lo tanto se comporta como una call europea (o sea responde al modelo que hemos desarrollado) pero cuando entra en contacto $V(S, t) = \max\{K - S; 0\}$, digamos en un intervalo $[A, B]$, ahí conviene ejercer. Obviamente en tal caso no se cumple B-S ya que $V(S, t) = \max\{K - S; 0\}$.

¿En qué momento se entra en contacto? Existe una frontera que depende del tiempo $S_f(t)$ tal que si

$$S < S_f(t)$$

4

entonces conviene ejercer.

Resumiendo afirmamos que vale lo siguiente. Si P es el precio de una put americana $P \in C^1$ y además

$$P(S, t) \geq \max\{K - S; 0\}$$

entonces si $S < S_f(t)$ entonces conviene ejercer.

Si la frontera de la región satisface que

$$0 \leq P(S, t) = \max\{K - S; 0\}$$

y $S < S_f$ entonces debe cumplirse que

$$P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$$

Intuitivamente, si derivamos en ambos lados

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

(se puede efectuar un argumento correcto por consideraciones financieras).

Observación

El supuesto de no arbitraje debe reemplazarse ahora por:

$$\frac{d\pi}{\pi} \leq rdt$$

La igualdad vale únicamente cuando V está “despegada” del obstáculo.

El problema de frontera libre se puede formular de esta manera

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \text{ si } S < S_f$$

$$P(S_f(t), t) = K - S_f(t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

Observación

Sabemos que a través de un cambio de variable podemos formular reescribir a la ecuación de B-S como una ecuación del calor.

Consideremos el caso estacionario de un problema de obstáculo ($\partial_t = 0$), por ejemplo

$$u'' = 0 \text{ si } x \notin (A, B)$$

y

$$u = \phi \text{ si } x \in [A, B]$$

con condición de borde

$$u(-1) = u(1) = 0$$

y además las condiciones de primer orden para el contacto

$$\begin{aligned} u(A) &= \phi(A); u'(A) = \phi'(A) \\ u(A) &= \phi(A); u'(A) = \phi'(A) \end{aligned}$$

Observación

Notemos que se ponen condiciones sobre puntos que no se conocen, de manera que el problema no está correctamente planteado, sin embargo para el caso unidimensional podemos proceder de la siguiente manera.

Cuando $u'' \neq \phi$ se tiene que $u'' = 0$ de manera que podemos escribir así

$$u''(u - \phi) = 0$$

y con esto evitamos la referencia explícita a los puntos desconocidos A y B .

Además pedimos que

$$\begin{aligned} u(-1) &= u(1) = 0 \\ u &\geq \phi \end{aligned}$$

y buscamos una solución C^1 .

Si bien los problemas son equivalentes, para la resolución conviene utilizar la segunda versión. La técnica utilizada es la del cálculo variacional. Se verá esto cuando se trate el problema lineal complementario.