INTRODUCCION A FINANZAS-Práctica 1

1. i) Un mercado se compone de dos securities cuyos precios actuales son respectivamente \$10 y \$5. Para cierto momento futuro T el mercado puede asumir tres estados diferentes, con vectores de precios $(12, 7)$, $(10, 6)$ y $(8, 4)$. Determinar si existen posibilidades de arbitraje.

ii) En la situación anterior, suponer ahora que los vectores de precios futuros son $(12, 4)$, $(10, 5)$ y $(8, 7)$. ¿ Hay posibilidades de arbitraje? ¿ Que valores podría tener en este mercado el retorno de un bono?

2. Un SWAP es un contrato que especifica lo siguiente:

i) El comprador X paga al vendedor Y una cantidad c al firmar el contrato en el momento $t = 0$.

ii) El vendedor entrega al comprador en el momento $t = T$ una unidad de un activo A_Y a cambio de una unidad de un activo A_X .

Supongamos que los valores de los activos se denotan por S_X^t y S_Y^t ($t = 0, T$), y que existe un retorno libre de riesgo R . Determinar el valor justo de c de dos maneras:

a) Por un argumento de arbitraje.

b) Usando el Teorema Fundamental de la APT (Arbitrage Pricing Theory).

3. En un mercado con N securities y M estados futuros, con un vector de precios actuales $(S_1, \dots, S_N)$ y vectores de precios futuros $(S_1^j(T), \dots, S_N^j(T))$ ($j = 1, \dots, M$), se dice que un portfolio $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ produce *arbitraje estricto* si se cumple una de las siguientes condiciones:

i) $\pi \cdot S < 0$ y $\pi \cdot S^j(T) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, M$.

ii) $\pi \cdot S = 0$ y $\pi \cdot S^j(T) > 0$ para todo $j = 1, \dots, M$.

Si en el mercado se puede comercializar un bono con retorno R , probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existe un portfolio que produce arbitraje estricto.

b) Existe un portfolio que satisface la condición i).

c) Existe un portfolio que satisface la condición ii).

4. Probar la siguiente versión del Teorema Fundamental:

Sea $\mathcal{M}$ un mercado con N securities, una de ellas libre de riesgo, y M estados futuros en tiempo T . Son equivalentes:

a) No hay oportunidades de arbitraje estricto.

b) Existe un vector $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)$ de probabilidades tal que el valor actual de cada security es igual a su valor esperado en T descontado según el factor dado por el retorno de la security libre de riesgo.

5. Mostrar que el teorema anterior no vale en general si el mercado puede asumir infinitos estados futuros. Considerar un mercado con tres securities, la tercera de ellas un bono con retorno 0, y las otras dos con valores actuales de $S_1 = 0$ y $S_2 = 2$. Supongamos que los vectores de los estados futuros para $(S_1(T), S_2(T))$ están dados por el conjunto

$$\Omega = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1, a_2 > 0, a_1 + a_2 > 1\} \cup \{(0, 1)\}$$

Probar:

i) No hay oportunidades de arbitraje estricto.

ii) No vale un enunciado análogo a 4.b).

¿ Qué se puede decir respecto de la versión original del teorema fundamental?

6. Consideremos un mercado con dos securities, una de ellas libre de riesgo con retorno R , y tres estados futuros. Supongamos que la security riesgosa tiene valor actual S_1 , y puede asumir tres valores futuros $S_1^1 > S_1^2 > S_1^3$.

i) Dar una condición necesaria y suficiente para que no haya arbitraje.

ii) Exhibir un ejemplo de una opción O que no se pueda replicar (es decir, tal que no haya una estrategia de hedging). ¿ Por qué existe O ?

iii) Mostrar que el precio actual de O no se puede determinar en forma única. Más precisamente, verificar que el conjunto de posibles valores actuales de O es un intervalo.

7. Se sabe que el precio actual de una acción es de \$40, y en un mes será de \$42 o de \$38. La tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual compuesta en forma continua. ¿Cuál es el valor de una opción call europea que expira en un mes cuyo strike price es de \$39? Idem para una put con el mismo strike price.

8. Explicar la diferencia entre la valuación de una opción europea mediante un árbol binomial de un período asumiendo que no hay arbitraje, y asumiendo riesgo neutral.
9. El precio de una acción es actualmente de \$100. En cada uno de los próximos seis meses el precio puede incrementarse o disminuir en un 10%. Sabiendo que la tasa libre de riesgo es del 8% anual compuesta en forma continua, calcular el valor de una opción call europea que expira en un año con un strike price de \$100. Comparar con el resultado obtenido al suponer que la tasa se compone mensualmente.
10. El precio de una acción es actualmente de \$40, y cada tres meses se incrementa en un 6% o disminuye en un 5%. Si la tasa libre de riesgo es del 12% anual compuesta en forma continua, calcular: i) El valor de una opción put europea que expira en seis meses con un strike price de \$42.
i) El valor de una opción put americana que expira en seis meses con un strike price de \$42.
11. El precio de una acción es actualmente de \$25, y al cabo de dos meses será de \$23 o \$27. La tasa libre de riesgo es del 10% anual compuesta en forma continua. Si la S_T es el precio de la acción al término de los dos meses, ¿cuál es el valor de una opción cuyo payoff a los dos meses es S_T^2 ?