INTRODUCCION A FINANZAS-Práctica 2

1. Una acción tiene precio inicial de \$ 40. Si $\mu = 0,1$ y $\sigma^2 = 0,16$ anuales, hallar un intervalo de confianza del 95 % para el precio de la acción a los seis meses (es decir, un intervalo $I_{0,95} = (\underline{S}, \overline{S})$ tal que $p(S \in I_{0,95}) = 0,95)$. Usar el hecho de que si Z es una variable aleatoria normal standard, entonces $p(-1,96 \leq Z \leq 1,96) \simeq 0,95)$.

2. Supongamos que el precio de una acción verifica que $\mu = 16\%$ y la volatilidad es de 30%. Si el precio de la acción al final de cierto día es de \$ 50, calcular:

a) El precio esperado de la acción al final del día siguiente.

b) El desvío standard del precio de la acción al final del día siguiente.

c) Un intervalo de confianza del 95 % para el precio de la acción al final del día siguiente.

3. Sea Z un movimiento browniano definido en $[0, T]$. Dada una partición $\mathcal{P}$ dada por $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, se define

$$V_{\mathcal{P}}(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

La variación cuadrática de Z se define como el límite (si existe)

$$VC(Z) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} V_{\mathcal{P}}(Z)$$

Probar:

i) $E[(Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2] = t_{j+1} - t_j$. Deducir que $E(V_{\mathcal{P}}(Z)) = T$.

ii) $Var[(Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2$, y entonces

$$Var(V_{\mathcal{P}}(Z)) = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \to 0 \qquad \text{para } |\mathcal{P}| \to 0.$$

iii) Desigualdad de Tchebycheff: si X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se cumple:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Deducir que $VC(Z) = T$ con probabilidad 1, es decir:

$$P(|VC(Z) - T| \geq \varepsilon) = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$. Concluir que, con probabilidad 1, Z no es diferenciable en ningún intervalo $[t, t + a]$.

4. Supongamos que el precio de una acción sigue un movimiento browniano $dS = \mu S dt + \sigma S dz$.

a) $>$ Cuál es el proceso que sigue la variable S^n?

b) $>$ Cuál es el valor esperado de S^n?

5. Deducir los valores de u, d y p en el modelo binomial a partir de la volatilidad σ y la tasa libre de riesgo r, para los casos:

i) $p = \frac{1}{2}$.

ii) $u = \frac{1}{d}$.

Sugerencia: Usar el hecho de que $E\left(S^2_{t+\Delta t}\right) = S^2_t e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$ (ver Wilmott).

6. Por medio del modelo binomial, calcular el valor de una opción con strike \$100 que expira en cuatro meses, sobre una acción cuyo precio actual es \$ 97, asumiendo que la tasa libre de riesgo es del 7% anual, y que la volatilidad es del 20%. Suponer $u = \frac{1}{d}$.

7. Construir un arbol binomial ($u = \frac{1}{d}$) de tres períodos cuatrimestrales para una acción que hoy vale \$100, suponiendo $r = 0,1$ y $\sigma = 0,4$. A partir de dicho árbol, evaluar:

i) Una call europea con strike 110.

ii) Una put europea con strike 110.

iii) Una put americana con strike 110.

iv) Una call europea con strike 110, suponiendo que la acción paga un dividendo equivalente a la décima parte de su valor al término del segundo cuatrimestre.

v) Una call americana con strike 110 para una acción como en iv).

vi) Una opción *asiática*, con strike igual al promedio de los valores que tomó el activo durante todo el período.

vii) Una opción *con barrera* (suponer distintos tipos de barrera).

8. En un árbol binomial de n pasos, sea $f_j = f_{u...ud...d}$ (j veces u y $n-j$ veces d). Para una opción call europea que expira en $T = n\Delta t$ con strike K, probar que

$$f_j = \max\{Su^j d^{n-j}, 0\}$$

En particular, si $u = \frac{1}{d}$, se tiene que

$$f_j \geq 0 \Longleftrightarrow j \geq \frac{1}{2}(n + \frac{log(K/S)}{log(u)})$$

i) >Es correcto decir que la probabilidad de que el payoff sea positivo coincide con la probabilidad de que $S_T \geq K$? Justificar.

ii) Encontrar una fórmula general para calcular el valor actual de la opción.