INTRODUCCIÓN A LA K-TEORÍA
Práctica 0

En esta práctica, R y S son anillos, y M, N R-módulos.

Anillos y módulos semisimples.

1. Sean R un anillo, E, F R-módulos simples. Probar
   (a) Si $f \in \mathrm{Hom}_R(E, F)$ es no nulo, entonces es un isomorfismo.
   (b) $D := \mathrm{End}_R(E)$ es un anillo de división.
2. Sea $M = \sum_{i\in I} E_i$ una suma (no necesariamente directa) de módulos simples. Probar que existe $J \subset I$ tal que $M = \bigoplus_{j\in J} E_j$.
3. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   (a) M es suma de submódulos simples.
   (b) M es suma directa de módulos simples.
   (c) Todo submódulo de M es un sumando directo.

   Un módulo M que satisface las condiciones de arriba se dice *semisimple*.
4. Probar que son equivalentes:
   (a) Todo R-módulo es proyectivo.
   (b) Todo R-módulo es inyectivo.
   (c) Todo R-módulo es semisimple.
   (d) El R-módulo ${}_RR$ (i.e. R visto como módulo a izquierda) es semisimple.
   (e) Existen módulos simples $S_1, \dots, S_n$, no isomorfos dos a dos (i.e. $S_i \not\cong S_j$ si $i \neq j$) y enteros $r_i \geq 1$ tales que ${}_RR = \bigoplus_{j=1}^n S_j^{n_j}$.
   (f) Existen anillos de división $D_1, \dots, D_n$ y enteros $r_1, \dots, r_n \geq 1$ tales que $R \cong \prod_{i=1}^n M_{r_i}(D_i)$
5. Sean k un cuerpo, $p = char(k)$, G un grupo finito, $n = |G|$ y $R = kG$ el álgebra de grupo. Probar que si $p \not| n$ entonces R es semisimple.
6. Sean k un cuerpo, R una k-álgebra de dimensión finita. Probar que R es semisimple si y sólo si $\mathrm{rad}R = 0$.
7. Sea $* : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})^{op}$, $a^* := \bar{a}^t$. Probar que si $R \subset M_n(\mathbb{C})$ es una $\mathbb{C}$-subálgebra cerrada bajo $*$, entonces R es semisimple. **Producto tensorial.**
8. Sean M un R-módulo a derecha, N un R-módulo a izquierda, y A un grupo abeliano. Una aplicación $\psi : M \times N \to A$ se dice R-*bilineal* si se satisfacen las condiciones siguientes
   - Para todo $m \in M$ y $n \in N$, las aplicaciones $\psi(m, ?) : N \to A$ y $\psi(?, n) : M \to A$ son $\mathbb{Z}$-lineales.
   - Si $r \in R$, $m \in M$ y $n \in N$, entonces $\psi(m \cdot r, n) = \psi(m, r \cdot n)$.

   Probar
   (a) El conjunto $\mathrm{Bil}_R(M, N; A)$ de todas las aplicaciones bilineales $M \times N \to A$ tiene una estructura natural de $\mathbb{Z}$-módulo.
   (b) La operación $(f \cdot a)(n) = f(an)$ hace de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, A)$ un R-módulo a derecha.
   (c) La aplicación $\alpha : \mathrm{Bil}_R(M, N; A) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, A))$, $\alpha(\psi)(m)(n) := \psi(m, n)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

9. Un *producto tensorial* de M y N es un grupo abeliano T junto con una aplicación R-bilineal $\phi : M \times N \to T$ tal que si $\psi : M \times N \to A$ es otra aplicación R-bilineal entonces existe un único morfismo de grupos $\bar{\psi} : T \to A$ tal que $\bar{\psi} \circ \phi = \psi$. Probar:

   (a) Si T existe, es único salvo isomorfismos. Notación: $T = M \otimes_R N$, $\phi(m,n) = m \otimes n$.

   (b) Si A es un grupo abeliano, entonces $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, A) = \operatorname{Bil}_R(M, N; A)$.

   (c) Sea $L = \mathbb{Z}^{(M \times N)}$, el módulo libre con un elemento base por cada elemento de $M \times N$. Consideremos el submódulo $L \supset L_0 =< \{(m \cdot r, n) - (m, r \cdot n) : m \in M, n \in N, r \in R\} >$. Probar que el cociente $T = L/L_0$ junto con la aplicación

   $$\phi : M \times N \to T, \quad \phi(m,n) = \bar{(m,n)}$$

   es un producto tensorial de M y N.

10. Probar que si N es un R-módulo a izquierda y

   $$0 \to M' \to M \to M" \to 0$$

   es una sucesión exacta de R-módulos a derecha, entonces

   $$M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M" \otimes_R N \to 0$$

   es exacta.

11. Probar que si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ entonces $M \otimes_R N = \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$.

12. Sea S un anillo. Un (R,S)-módulo es un grupo abeliano N que es a la vez un R-módulo

   a izquierda y un S-módulo a derecha, de modo que la siguiente condición de compatibilidad se satisface:

   $$(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s) \qquad (r \in R, s \in S, n \in N).$$

   (a) Probar que $M \otimes_R N$ tiene una estructura natural de S-módulo a derecha tal que $(m \otimes n) \cdot s = m \otimes (n \cdot s)$.

   (b) Sean P un S-módulo a derecha y $\psi : M \times N \to P$ una aplicación R-bilineal tal que $\psi(m, n \cdot s) = \psi(m,n) \cdot s$ $(m \in M, n \in M, s \in S)$. Probar que $\bar{\psi}$ es morfismo de S-módulos.

   (c) Enunciar y demostrar las versiones apropiadas de los ítems anteriores para los casos en que M es un (S,R)-módulo y N un R-módulo, y en que M es un (S,R)-módulo y N un (R,T)-módulo.

13. Probar que si N es un R-módulo a izquierda, entonces $R \otimes_R N \cong N$.

14. Sean N un R-módulo, $R \to S$ un morfismo de anillos, P un S-módulo, y $f : N \to P$ un morfismo de R-módulos. Probar que existe un único morfismo de S-módulos $\bar{f} : S \otimes_R N \to P$ tal que $\bar{f}(1 \otimes n) = f(n)$.

15. Sea $I \subset R$ un ideal bilátero. Probar que $R/I \otimes_R N = N/IN$.

16. Sean N un R-módulo, $f : R \to S$ un morfismo de anillos, y P el S-módulo $S \otimes_R N$. Probar

   (a) N libre $\Rightarrow$ P libre.

   (b) N proyectivo $\Rightarrow$ P proyectivo.

   (c) N finitamente generado $\Rightarrow$ P finitamente generado.

   Localización.

17. Sea $\Sigma \subset R$ un subconjunto. Probar que existen un anillo R' y un morfismo de anillos $\iota : R \to R'$ tales que

   - $\forall \sigma \in \Sigma$ $\iota(\sigma)$ es inversible en R'.

- Si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos tal que $\forall \sigma \in \Sigma$ $f(\sigma)$ es inversible en S, entonces existe un único morfismo de anillos $\bar{f} : R' \to S$ tal que $\bar{f} \circ \iota = f$.

Notación: $R' = R[\Sigma^{-1}]$.

18. Sean N un R-módulo, $\Sigma \subset R$ un subconjunto, y $\rho : R \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(N)$, $\rho(r)(n) = r \cdot n$. Supongamos que se satisface lo siguiente

$$\forall \sigma \in \Sigma, \quad \rho(\sigma) : N \to N \text{ es un isomorfismo.}$$

Probar:

(a) N admite una única estructura de $S := R[\Sigma^{-1}]$-módulo que extiende a la de R-módulo.

(b) Hay un isomorfismo natural de S-módulos $S \otimes_R N \cong N$.

19. Supongamos que $\Sigma \subset ZR$ es un subconjunto de elementos centrales de R, cerrado por multiplicación, y tal que $1 \in R$. Sea N un R-módulo. Consideremos las aplicaciones

$$\beta : \Sigma \times N \to R[\Sigma^{-1}] \otimes_R N, (\sigma, n) \mapsto s^{-1} \otimes n$$
$$\iota : N \to R[\Sigma^{-1}] \otimes_R N, \quad \iota(n) = 1 \otimes n$$

Probar:

(a) β es suryectiva.

(b) $\beta(\sigma, n) = \beta(\tau, m) \iff$ existe $\nu \in \Sigma$ tal que $\nu\tau \cdot n = \nu\sigma \cdot m$.

(c) $\ker(\iota) = \{n \in N : \exists(\sigma \in \Sigma)\sigma \cdot n = 0\}$.

Notación: cuando todo elemento de $R[\Sigma^{-1}]$ puede expresarse como una fracción $s^{-1}n$ (por ejemplo, de acuerdo a lo que acabamos de ver, este es el caso si Σ es central) escribimos $\Sigma^{-1}R$ y $\Sigma^{-1}N$ por $R[\Sigma^{-1}]$ y $R[\Sigma^{-1}] \otimes_R N$

20. Probar que si $\Sigma \subset R$ es un subconjunto de elementos centrales como en el ejercicio anterior, y

$$0 \to N' \to N \to N" \to 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos a izquierda, entonces

$$0 \to \Sigma^{-1}N' \to \Sigma^{-1}N \to \Sigma^{-1}N" \to 0$$

es exacta.

21. Sean R conmutativo, N un R-módulo, $\max R$ el conjunto de todos los ideales maximales de R. Si $\mathfrak{m} \in \max R$, ponemos $N_{\mathfrak{m}} := (R \backslash \mathfrak{m})^{-1}N$ y llamamos $\iota_{\mathfrak{m}} : N \to N_{\mathfrak{m}}$ a la aplicación $n \mapsto 1 \otimes n$. Probar:

(a) $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \max R} \ker \iota_{\mathfrak{m}} = 0$.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de R-módulos, entonces f es iso (resp. epi, resp. mono) $\iff$ $\forall \mathfrak{m} \in \max R$, $f_{\mathfrak{m}}$ es iso (resp. epi, resp. mono).

22. Sea R conmutativo, $\mathfrak{p} \subsetneq R$ un ideal. Decimos que $\mathfrak{p}$ es *primo* si $\Sigma = R \backslash \mathfrak{p}$ es cerrado por multiplicación. Probar que las afirmaciones del ejercicio anterior siguen siendo válidas si se reemplaza en todas partes "maximal" por "primo".