Introducción a la K-teoría

Práctica 1

En esta práctica, R es un anillo, y R^* es el conjunto de elementos inversibles de R.

1. Sea M un monoide abeliano. Se considera la siguiente relación de equivalencia en $M \times M$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff (\exists x \in M) \;\; m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x.$$

   Probar que $M/\sim$ tiene una estructura natural de grupo abeliano que hace de $\iota : M \to M/\sim$ un morfismo de monoides, y que el par $(M/\sim, \iota)$ es un grupo de Grothendieck de M.

2. Sean $g \in R^*$ y $\phi_g : R \to R$, $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ el automorfismo interior asociado a R. Probar que ϕ_g induce el morfismo identidad de $K_0(R)$.

3. Sea $\mathbb{N} \coprod \mathbb{N} = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0^2$ la unión disjunta de dos copias del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, y sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \coprod \mathbb{N}$ una biyección. Si $a, b \in R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, ponemos

$$(a \oplus_\phi b)_{i,j} := \begin{cases} a_{\phi(i),\phi(j)} & \text{si } \phi(i), \phi(j) \in \mathbb{N} \times \{0\} \\ b_{\phi(i),\phi(j)} & \text{si } \phi(i), \phi(j) \in \{0\} \times \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Probar

   (a) $\oplus_\phi(\mathrm{Idem}(R) \times \mathrm{Idem}(R)) \subset \mathrm{Idem}(R)$.

   (b) $\oplus_\phi$ induce una operación en $\mathrm{Idem}(R)_{\mathrm{GL}(R)}$, que es conmutativa y asociativa, y que tiene a la matriz 0 por elemento neutro.

   (c) A través de la biyección canónica $\mathrm{Idem}(R)_{\mathrm{GL}(R)} \cong \mathrm{Proy}(R)$, $\oplus_\phi$ corresponde a la suma directa de módulos. En particular, $\oplus_\phi$ no depende de la elección de la biyección ϕ.

4. Un *anillo con suma directa* es un anillo R junto con elementos α_i, β_i $(i = 1, 2)$ tales que

$$\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1, \qquad \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = 1.$$

   Sea $R = (R, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ un anillo con suma directa. Si $a, b \in R$, ponemos

$$a \boxplus b := \beta_1 a \alpha_1 + \beta_2 b \alpha_2.$$

   (a) Sea $Inn(R) := \{\phi_g : g \in R^*\} \subset Aut(R)$ el grupo de automorfismos interiores de R. Probar que $\boxplus$ induce una operación conmutativa y asociativa en $R_{Inn(R)}$.

   (b) Sea

$$Q := \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

   Probar que $Q \in \mathrm{GL}_3(R)$ y que

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} a \boxplus b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (c) Probar que $\boxplus : R \times R \to R$ es morfismo de anillos.

   (d) Probar que la composición $K_0(R) \oplus K_0(R) \to K_0(R \times R) \xrightarrow{\boxplus} K_0(R)$ es el morfismo $(x, y) \mapsto x + y$.

(e) Decimos que el anillo con suma directa R tiene sumas directas infinitas si admite un endomorfismo $R \to R$, $a \mapsto a^\infty$ tal que

$$a \boxplus a^\infty = a^\infty \qquad (a \in R).$$

Probar que si R tiene sumas directas infinitas, entonces $K_0(R) = 0$.

5. En los siguientes casos, probar que $K_0(R) = 0$.

   (a) Sean A un anillo, A_A el A-módulo libre a derecha, $L := \bigoplus_{i=1}^\infty A_A$, y $R = \mathrm{End}_A(L)$.

   (b) Sean $S := \{z \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \sum_n |z_n|^2 = 1\}$ y $R \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las matrices a tales que

$$||a||^2 := \sup_{z\in S} \sum_i |\sum_j a_{i,j} z_j|^2 < \infty$$

6. Supóngase que existe un morfismo de anillos ϵ de R en un anillo conmutativo $A \neq \{0\}$. Probar:

   (a) Dos bases de un mismo R-módulo libre L tienen el mismo cardinal.

   (b) El morfismo canónico $\iota : \mathbb{Z} = K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(R)$ tiene inversa a izquierda.

7. Verdadero o falso: si el morfismo cannico $\mathbb{Z} \to K_0(R)$ tiene inversa a izquierda, entonces existe un morfismo de anillos $R \to A$ donde A es un anillo conmutativo no nulo.

8. Sean $n, m, d \in \mathbb{N}$ y k un cuerpo. Consideremos el morfismo de k-álgebras $\phi_d : M_n(k) \to M_{nd}(k)$,

$$\phi_d(A) = A^{\oplus^d}.$$

   Probar

   (a)

$$\mathrm{Hom}_{k-Alg}(M_n(k), M_m(k)) \neq \emptyset \iff n \backslash m.$$

   (b) En las condiciones de i), si $m = nd$ y $f \in \mathrm{Hom}_{k-Alg}(M_n(k), M_m(k))$ entonces existe $g \in \mathrm{GL}_m(k)$ tal que para todo $x \in M_n(k)$, $f(x) = g\phi_d(x)g^{-1}$.

   (c) Si $f \in \mathrm{Hom}_{k-Alg}(M_n(k), M_m(k))$ entonces el morfismo $\mathbb{Z} = K_0(M_n(k)) \to K_0(M_m(k)) = \mathbb{Z}$ inducido por f es la multiplicación por $Tr(f(1))/n$.

9. Un *número súpernatural* $\underline{n} = \{n_i\}$ una sucesión de elementos $n_i \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

   (a) Sea p_i el iésimo primo positivo; denotamos $\nu_i(x)$ la valuación p-ádica del número racional x. Si $\underline{n}$ es un súpernatural, se define

$$\mathbb{Q}(\underline{n}) := \{x \in \mathbb{Q} : (\forall i) \ \ \nu_i(x) \geq -n_i\}.$$

   Probar que $\mathbb{Q}(\underline{n})$ es un subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$.

   (b) Sea $\{r_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de números naturales tales que para todo i, $r_i \backslash r_{i+1}$. Sea $\underline{n} = \{n_i\}$ el súpernatural dado por $n_i := \sup_j \nu_i(r_j)$ $(i \geq 1)$. Probar que

$$\mathbb{Q}(\underline{n}) = \bigcup_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{Z}}{r_i}.$$

   (c) Sean $\{r_i\}_{i\geq 1}$ y $\underline{n}$ como en el ítem anterior, k un cuerpo,

$$M_{r_1}(k) \xrightarrow{f_1} M_{r_2}(k) \xrightarrow{f_2} M_{r_3}(k) \xrightarrow{f_3} \ldots$$

   una sucesión de morfismos, y $A = \mathrm{colim}_\mathbb{N} M_{r_i}(k)$. Probar que existe un isomorfismo $K_0(A) \cong \mathbb{Q}(\underline{n})$ que envía a la clase de p_1 en $1 \in \mathbb{Q}(n)$.

10. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Caracterizar $K_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ en función de la factorización prima de n.

11. Sean R conmutativo, $\mathrm{Spec}(R)$ el conjunto de todos los ideales primos de R, y $\mathrm{Max}(R)$ el conjunto de todos los maximales de R. Un R-módulo M se dice *playo* si $M \otimes_R$ es un funtor exacto. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo M.

    (a) $\forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $M_{\mathfrak{p}}$ es un $R_{\mathfrak{p}}$ módulo playo.

    (b) $\forall\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $R_{\mathfrak{m}}$ módulo playo.

    (c) M es un R-módulo playo.

    Deducir que si para todo para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo libre, entonces M es playo.

12. Sean $R \to S$ un morfismo de anillos conmutativos, y M y N R-módulos. Se considera el morfismo natural de S módulos

    $$S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N), \quad s \otimes f \mapsto (t \otimes m \mapsto st \otimes f(m)). \tag{1}$$

    Decimos que M es *finitamente presentado* si existe una sucesión exacta de R-módulos

    $$L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

    con L_i libre y finitamente generado $(i = 0, 1)$. Probar que si S es playo y M es finitamente presentado, entonces (1) es un isomorfismo.

13. Sean R conmutativo noetheriano, y M un módulo playo finitamente generado. Probar que M es proyectivo.