Introducción a la K-teoría
Práctica 2

En esta práctica, R es un anillo, y R^* es el conjunto de elementos inversibles de R.

1. Un anillo R (no necesariamente conmutativo) se dice *hereditario* –a izquierda– si todo ideal a izquierda de R es un R-módulo proyectivo. Probar que si R es hereditario y $S \subset R^n$ un submódulo, entonces existen $m \leq n$ e ideales $I_1, \ldots, I_m$ tales que $S \cong \bigoplus_{j=1}^m I_j$. En particular, S es proyectivo.

2. Sea R conmutativo; llamamos $Pic(R)$ al conjunto de clases de isomorfismo de R-módulos proyectivos f.g. de rango 1.

   (a) Sea $P^* := \hom_R(P, R)$. Probar que si $P \in Pic(R)$, entonces la aplicación
   $$tr : P \otimes_R P^* \to R, \quad tr(p \otimes \gamma) = \gamma(p)$$
   es un isomorfismo de R-módulos.

   (b) Probar que $(Pic(R), \otimes_R)$ es un grupo abeliano. Este grupo de llama el *grupo de Picard* de R.

3. Sean R un dominio noetheriano, F su cuerpo de cocientes, e $I, J \subset F$ ideales fraccionarios.

   (a) Probar que si I es playo, entonces la aplicación $I \otimes_R J \to IJ$, $i \otimes j \mapsto ij$ es un isomorfismo.

   (b) Probar que $(R : J) \cong J^*$.

   (c) Probar que si I es inversible, entonces es proyectivo de rango 1. En particular se tiene una aplicación $Cart(R) \to Pic(R)$. Probar que esta aplicación induce un monomorfismo $C(R) \to Pic(R)$.

   (d) Sea P un módulo proyectivo de rango 1. Entonces existe un isomorfismo de F-módulos $\phi : P \otimes_R F \to F$. Probar que $K := \{\phi(p \otimes 1) : p \in P\} \in Cart(R)$. Concluir que $C(R) \cong Pic(R)$.

4. Sean k conmutativo, $\iota_j : k \to R_i$ $(j = 1, 2)$ k-álgebras centrales (i.e. $\iota_j(k) \subset ZR_j$), y $S = R_1 \otimes_k R_2$.

   (a) Si P_j es proyectivo f.g. sobre R_j $(j = 1, 2)$ entonces $P_1 \otimes_k P_2$ es proyectivo f.g. sobre S.

   (b) Si $e_j \in \mathrm{Idem}_{n_j}(R_j)$ es tal que $P_j = e_j(R^{n_j})$, describir un $e \in \mathrm{Idem}_{n_1 n_2}(S)$ tal que $e(S^{n_1 n_2}) = P_1 \otimes_k P_2$.

   (c) La aplicación $(P, Q) \mapsto P \otimes_k Q$ induce un morfismo de grupos
   $$\cup : K_0(R_1) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(R_2) \to K_0(S).$$

   (d) Si R_3 es otra k-álgebra central y $x_j \in K_0(R_j)$ entonces
   $$(x_1 \cup x_2) \cup x_3 = x_1 \cup (x_2 \cup x_3) \in K_0(R_1 \otimes_k R_2 \otimes_k R_3).$$

   (e) Sea R una k-álgebra conmutativa, y $\mu : R \otimes_k R \to R$, $\mu(r \otimes s) = rs$. Probar que $\mu \circ \cup$ define una estructura de anillo conmutativo con unidad en $K_0(R)$.

   (f) Probar que $\cup$ induce un morfismo de $K_0(k)$-módulos
   $$K_0(R_1) \otimes_{K_0(k)} K_0(R_2) \to K_0(S).$$

   (g) Probar que si $k' \to k$ es un morfismo de anillos conmutativos, entonces el cuadrado siguiente es conmutativo.
   $$\begin{tikzcd} K_0(R_1) \otimes_{K_0(k)} K_0(R_2) \arrow[r, "\cup"] & K_0(R_1 \otimes_k R_2) \\ K_0(R_1) \otimes_{K_0(k')} K_0(R_2) \arrow[r, "\cup"'] \arrow[u] & K_0(R_1 \otimes_{k'} R_2) \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

5. Sean R un dominio de Dedekind, y $C(R) \subset K_0(R)$ la inclusión canónica. Probar que $C(R)$ es un ideal de cuadrado cero.
6. Probar que hay un isomorfismo de anillos $K_0(\mathbb{R}[x,y]/ < x^2+y^2-1 >) \cong \mathbb{Z}[t]/ < 2t, t^2 >$.
7. Sean $R = \mathbb{R}[x,y]/ < x^2+y^2-1 >$ y $R \supset \mathfrak{m} := < x-1, y >$. Hallar $e \in \mathrm{Idem}_2(R)$ tal que $eR^2 \cong \mathfrak{m}$.
8. Para $k = \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$, determinar si $R = k[x,y]/ < x^2+y^2-1 >$ es domino de Dedekind y en tal caso, calcular el anillo $K_0(R)$.
9. Hacer los ejercicios 1.4.20, 1.4.21 y 1.4.24 del libro de Rosenberg.
10. Sean R_1, R_2 anillos. Probar que $K_1(R_1 \times R_2) = K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$.
11. Probar que $K_1(M_n(R)) = K_1(R)$.
12. Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ un sistema filtrante de anillos. Probar que $K_1(\mathrm{colim}_I\, R_i) = \mathrm{colim}_I\, K_1(R_i)$.
13. Sea $M_{r_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{f_1} M_{r_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{f_2} M_{r_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{f_3} \ldots.$ una sucesión de morfismos, y $R = \mathrm{colim}_{\mathbb{N}}\, M_{r_i}(\mathbb{C})$. Caracterizar $K_1(R)$.
14. Probar que si R es un dominio euclídeo, entonces $SK_1(R) = 0$.
15. Sea $\eta : \mathrm{Idem}(R) \to GL(R)$, $e \mapsto 1 - 2e$.
    (a) Probar que η induce un morfismo $K_0(R) \to K_1(R)$.
    (b) Probar que $\eta(K_0(R))$ está contenido en la 2-torsión de $K_1(R)$.
    (c) Para $R = \mathbb{R}[x,y]/ < x^2+y^2-1 >$, calcular $\eta(K_0(R))$.
16. Probar que si R tiene sumas directas infinitas, entonces $K_1(R) = 0$.