Introducción a la K-teoría

Práctica 3

1. Sean R un anillo conmutativo con unidad, y $nil(R) := \{r \in R : (\exists n) \;\; r^n = 0\}$.
   (a) Probar que $nil(R) \lhd R$.
   (b) Decimos que R es *reducido* si $nil(R) = 0$. Sea $R_{red} := R/nil(R)$. Probar que R_{red} es reducido.
   (c) Probar que si R es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k, entonces $R_{red} := \prod F_i$, un producto (finito) de extensiones finitas de k.

2. Sea

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

   un cuadrado de Milnor de anillos conmutativos con unidad. Probar que hay una sucesión exacta

$$1 \to R^* \to A^* \oplus S^* \to B^* \to Pic(R) \to Pic(A) \oplus Pic(S) \to Pic(B)$$

3. Sean R un anillo conmutativo con unidad, M un R-módulo, y $n \geq 0$. Se considera la acción del grupo simétrico Σ_n en la potencia tensorial $T^nM := M^{\otimes_R n}$. La *potencia exterior* n-ésima de M es

$$\Lambda^n M := T^n M / < m - sg(\sigma)\sigma(m) : m \in T^n M > .$$

   (a) Si N es otro R-módulo, entonces

$$\Lambda^n(M \oplus N) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p M \otimes_R \Lambda^{n-p} N$$

   (b) Si M es proyectivo o finitamente generado, $\Lambda^n M$ también lo es. Si M es proyectivo de rango m, entonces $rk(\Lambda^n M) = \binom{n}{m}$.
   (c) Sea $f : P \to Q$ un morfismo entre módulos proyectivos de rango n. Llamamos *determinante* de f a la aplicación $\Lambda^n f : \Lambda^n P \to \Lambda^n Q$. Probar que si $P = Q = R^n$, $det(f)$ es el determinante de la matriz de f en una base.
   (d) Supongamos que R no tiene idempotentes no triviales. Sea $Proj(R)$ el monoide de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados. Probar que la aplicación

$$det : Proj(R) \to Pic(R), \;\; det(P) := \Lambda^{rkP} P$$

   es morfismo de monoides.

4. Sea R un dominio con cuerpo de cocientes F. Supongamos que existe un dominio de Dedekind S tal que $R \subsetneqq S \subsetneqq F$ y tal que S es finitamente generado como R-módulo. Probar que $det : \tilde{K}_0(R) \to Pic(R)$ es un isomorfismo.

5. Sean R y S como en el ejercicio anterior. Supongamos que $R \subsetneqq S$ y que R es un álgebra de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Sean $I = Ann_R(S/R)$, $A = R/I$, $B = S/I$.
   (a) Probar que $SK_1(B) = 0$.
   (b) Probar que $A^* \to B^*$ no es suryectiva.
   (c) Teniendo en cuenta que si T es un anillo unital noetheriano y regular entonces $K_n(T) = K_n(T[t_1, \ldots, t_p])$, probar que son equivalentes:
      - $K_0(R) = K_0(R[t])$.

- Para todo p, $K_0(R) = K_0(R[t_1, \dots, t_p])$.
- $Pic(R) = Pic(R[t])$.
- Para todo p, $Pic(R) = Pic(R[t_1, \dots, t_p])$.
- B es reducido.

Si las condiciones equivalentes de arriba se satisfacen, decimos que R es *seminormal*.

6. Sean R y k como el ejercicio anterior; supongamos que $S = k[t]$. Probar que $Pic(R) \neq 0$.

7. Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado, $L_1 = a_1x - b_1y, \dots, L_r = a_rx - b_ry$ rectas distintas en k^2. Supongamos que $b_i \neq 0$ para todo i. Sean $n_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, $N = \sum n_i$, $f := L_1^{n_1} \dots L_r^{n_r} - x^{N+1}$, $R := k[x, y]/f$.

   (a) Probar que R es dominio íntegro.

   (b) Probar que $\iota : k[x, y] \to k[t]$, $\iota(x) = \prod_i (a_i - b_it)^{n_i}$, $\iota(y) = t\iota(x)$ induce un morfismo inyectivo $R \subset k[t]$.

   (c) Probar que R es seminormal si y sólo si para todo i, $n_i = 1$.

   (d) Calcular $Pic(R)$ en los siguientes casos

   - R seminormal.
   - $f = y^N - x^{N+1}$.

A partir de aquí, anillo=anillo sin unidad.

8. Sean $f : A \to B$ un morfismo unital, $a, a^* \in M_n(A)$ tales que $f(a)f(a^*) = f(a^*)f(a) = 1$. Probar que
$$b := \begin{bmatrix} 2a - aa^*a & aa^* - 1 \\ 1 - a^*a & a^* \end{bmatrix} \in GL_{2n}(A)$$
y que $f(b) = f(a) \oplus f(a)^{-1}$.

9. Sean $\pi : B \to C$ un morfismo unital, $g \in GL_n(C)$, y $h \in GL_{2n}(B)$ tales que $\pi(h) = g \oplus g^{-1}$. Sean $A = \ker \pi$, $\iota : A^+ \to B$ y $\epsilon : A^+ \to \mathbb{Z}$ los morfismos canónicos.

   (a) Probar que existe un único elemento $e \in M_n(A^+)$ tal que $\epsilon(e) = p_n$ y $\iota(e) = hp_nh^{-1}$. Probar que $e \in \mathrm{Idem}_n(A)$.

   (b) Probar que el morfismo de conexión $\partial : K_1(C) \to K_0(A)$, manda la clase de g en $[e] - [p_n]$.

   (c) Dar una fórmula para ∂ cuando $B \to C$ no es unital.

10. Probar que las siguientes fórmulas son válidas para anillos no unitales.

    (a) $K_0(M_n(A)) = K_0(A)$.

    (b) $K_0(A \times B) = K_0(A) \oplus K_0(B)$.

    (c) $K_0(\mathrm{colim}_i A_i) = \mathrm{colim}\, K_0(A_i)$ (A_i sistema filtrante).

11. Sea $\iota_0 : A \to M_2(A)$, $\iota_0(a) = a \oplus 0$. Un funtor F de anillos en grupos abelianos se dice M_2-*estable* si $F(\iota_0)$ es un isomorfismo para todo A.

    (a) Probar que K_0 es M_2-estable.

    De aquí en adelante, F es un funtor M_2-estable fijo.

    (b) Sea $n \geq 2$. Probar que F envía el morfismo $A \to M_nA$, $a \mapsto a \oplus 0_n$, en un isomorfismo.

    (c) Sea $\iota_1 : A \to M_2(A)$, $\iota(a) = 0 \oplus a$. Probar que $F(\iota_1) = F(\iota_0)$.

    (d) Sean $B \supset A$ un supra-anillo, $V, W \in B$ tales que $WAV \subset A$, y que para todo $a, a \in A$, $aVWa' = aa'$. Probar que
    $$\phi^{V,W} : A \to A, \quad \phi(a) = WaV$$
    es morfismo de anillos, y que $F(\phi^{V,W}) = 1_{F(A)}$.

12. Sean $A, B \subset C$ subanillos, y $p, q \in C^n$ tales que $p_i A q_j \subset B$ $(1 \leq i, j \leq n)$ y que para todo $a, a' \in A$, $a(\sum_i q_i p_i)a' = aa'$.

    (a) Probar que $\xi : A \to M_n(B)$, $\xi(a)_{i.j} = p_i a q_j$ es un homomorfismo de anillos.

    (b) Sean F un funtor M_2-estable, y $F(p,q) : F(A) \to F(B)$ la composición de $F(\xi)$ con el isomorfismo canónico. Probar que si $A = B$, entonces $F(p,q) = 1_{F(A)}$.

13. Dos anillos unitales R y S se dicen *equivalentes Morita* si existen bimódulos ${}_S P_R$ y ${}_R Q_S$ junto con isomorfismos de bimódulos $f : P \otimes_R Q \to S$ y $g : Q \otimes_S P \to R$.

    (a) Utilizando f y g, definir una estructura de anillo en

    $$C := \begin{bmatrix} A & Q \\ P & B \end{bmatrix}$$

    (b) Sean n, $p, p' \in P^n$, $q, q' \in Q^n$ tales que $f(\sum_i p_i \otimes q_i) = 1$, $g(\sum_i q'_i \otimes p'_i) = 1$. Probar que si F es un funtor M_2-estable, entonces $F(p,q)$ y $F(q', p')$ son morfismos inversos. En particular $F(R) \cong F(S)$.

    (c) Probar que R y $M_n(R)$ son equivalentes Morita.

    (d) Probar que si R y S son equivalentes Morita, entonces hay equivalencias de categorías $Mod - R \cong Mod - S$ y $R - Mod \cong S - Mod$.

    (e) Dar una definición de equivalencia Morita para anillos sin unidad que sea preservada por todo funtor M_2-estable.