Introducción a la K-teoría

Práctica 3

1. Sean A, B anillos $\phi, \psi : A \to D \rhd B$ un casi-homomorfismo de A en B. Sean $G : Rings \to \mathfrak{Ab}$ un funtor exacto partido, y $G(\phi, \psi) : G(A) \to G(B)$ el morfismo inducido. Probar

   (a) $G(\phi, 0) = G(\phi)$.

   (b) $G(\psi, \phi) = -G(\phi, \psi)$.

   (c) Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"'] & B \arrow[l] \arrow[d, dotted] \\ A' \arrow[r, bend left, "\phi'"] \arrow[r, bend right, "\psi'"'] & C' & B' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

   es un morfismo de casi-homomorfismos, entonces

$$G(g\phi, g\psi) = G(g_{|B})G(\phi, \psi) = G(\phi' f, \psi' f) = G(\phi', \psi')G(f).$$

   (d) Si para todo $x, y \in A$ se tiene $\phi(x)\psi(y) = \psi(x)\phi(y) = 0$, entonces $G(\phi + \psi, \phi) = G(\psi)$.

2. Sean

$$\begin{tikzcd} A \\ C \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd} \tag{1}$$

   morfismos de anillos. Probar que el pushout $A \cup_C B$ de (1) existe en $Rings$.

3. Sean $A \supset C \subset B$ anillos, y $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$ morfismos tales que $\alpha_{|C} = \beta_{|C} = id_C$. Sean $S := A \cup_C B$ y $P := A \times_C B$. Se consideran los siguientes morfismos canónicos:

$$A \xrightarrow{\iota_A} S \xleftarrow{\iota_B} B$$

$$A \xleftarrow[\pi_A]{} P \xrightarrow[\pi_B]{} B$$

$$S \xrightarrow[\alpha\vee\beta]{} C \xleftarrow[\alpha\wedge\beta]{} P$$

   (a) Probar que existen morfismos $\nu : S \to P$ y $\eta : P \to M_2 S$ tales que

$$\pi_A \nu \iota_A = 1, \quad \pi_A \nu \iota_B = \beta, \quad \pi_B \nu \iota_A = \alpha, \quad \pi_B \nu \iota_B = 1,$$
$$\eta(a, b) = \begin{bmatrix} \iota_A(a) & 0 \\ 0 & \iota_B(b) \end{bmatrix}$$

   (b) Sean $D_1 := \ker(\alpha \vee \beta)$, $D_2 = \ker(\alpha \wedge \beta)$ y $\Delta : 1 \to M_2$ la transformación natural que manda un elemento a en la matriz diagonal $a \oplus a$. Se tiene un diagrama conmutativo con filas exactas escindidas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\nu'"'] & S \arrow[r, "\alpha\vee\beta"] \arrow[d, "\nu"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\eta'"'] & P \arrow[r, "\alpha\wedge\beta"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_2(D_1) \arrow[r] & M_2(S) \arrow[r, "M_2(\alpha\vee\beta)"'] & M_2(C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notación: La letra j denonta la transformación natural $1 \to M_2$ dada por la inclusión en el lugar $(1,1)$.

(c) Sea $\xi = e_{12} - e_{21} \in GL(S^+)$. Probar que $\xi \in GL(S^+)_0$ y que

$$\xi(\eta\nu\iota_B(b))\xi^{-1} = j_S\iota_B(b) \qquad (b \in B)$$

(d) Probar que $\eta\nu$ es homotópico a $j_S(\alpha \wedge \beta)$, y que $\eta'\nu'$ es homotópico a j_{D_1}.

(e) Probar que $\nu'\eta'$ es homotópico a j_{D_2}.

(f) Probar que si $G : \mathit{Rings} \to \mathfrak{Ab}$ es un funtor exacto partido, M_2-estable, e invariante homotópico, entonces $G(\nu)$ es un isomorfismo.

(g) Probar que si G es como en el ítem anterior, entonces $G(S) \cong G(A) \times_{G(C)} G(B)$.

4. Probar que $KH_0(\mathbb{Z}) = K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

5. Sean $n \geq 1$ y τ_n el anillo unital libre en elementos $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ sujetos a $\alpha_i\beta_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Probar que $KH_0(\tau_n) = \mathbb{Z}^n$.

Recordatorio: Recordemos que un funtor $G : \mathit{Rings} \to \mathfrak{Ab}$ se dice *aditivo* si para todo $A, B \in \mathit{Rings}$ el morfismo natural $G(A \times B) \to G(A) \times G(B)$ es un isomorfismo.

6. Sea $G : \mathit{Rings} \to \mathfrak{Ab}$ un funtor M_2-estable y aditivo.

(a) Probar que si R es un anillo con suma $\boxtimes : R \times R \to R$, entonces la composición

$$G(R) \oplus G(R) \cong G(R \times R) \xrightarrow{G(\boxtimes)} G(R)$$

es el morfismo suma, que envía $(x, y) \mapsto x + y$.

(b) Probar que si R tiene sumas infinitas, entonces $G(R) = 0$.

Recordatorio: Sea $[n] \mapsto G_n$ un grupo simplicial, con caras d_i y degeneraciones s_i. El *complejo de Moore* de G es (N_*G, d_0), donde

$$N_nG := \bigcap_{i=1}^{n} \ker d_i$$

Recordemos que

- $d_0(N_{n+1}G) \triangleleft N_nG$ $(n \geq 0)$.
- $\pi_*G = H_*(NG)$.

7. Sean $f, g : G \to H$ morfismos de grupos simpliciales. Supónganse dados, para cada $n \geq 0$, morfismos $h_0, \ldots, h_n : G_n \to H_{n+1}$ tales que

$$d_ih_j = \begin{cases} f & \text{si } i = j = 0 \\ h_{j-1}d_i & \text{si } i < j \\ d_ih_{i-1} & \text{si } i = j \neq 0 \\ h_jd_{i-1} & \text{si } i > j+1 \\ g & \text{si } i = n+1, j = n \end{cases} \tag{2}$$

Sea $h : G_* \to H_{*+1}$,

$$h(x) = (\prod_{i=0}^{n} h_i(x)^{(-1)^i}) \cdot (\prod_{i=0}^{n} s_i(g(x))^{(-1)^i})^{-1}$$

Probar que si $x \in (\ker d_0) \cap N_nG$, entonces $h(x) \in N_{n+1}H$ y $d_0(h(x)) = f(x)g(x)^{-1}$.

8. Sean A un anillo, $\iota : A \to A[x]$ la inclusión canónica, y $\epsilon : A[x] \to A$ la evaluación en 0. Para cada $n \geq i \geq 0$ se definen morfismos $h_i : \Delta_n^{pol}\mathbb{Z}[x] \to \Delta_{n+1}^{pol}\mathbb{Z}[x]$, $h_i(t_j) = s_i(t_j)$, $h_i(x) = x(t_i + \cdots + t_{n+1})$. Probar que los morfismos $f = id$, $g = \iota\epsilon$ y $1 \otimes h_i : \Delta_n^{pol}(A[x]) \to \Delta_{n+1}^{pol}(A[x])$ satisfacen las condiciones (2).

9. Sean A un anillo y $n \geq 1$. Se define $KV_n'(A) := \pi_{n-1}GL(\Delta^{pol}A)$. Probar:

   (a) $KV_1'(A) = KV_1(A)$.

   (b) Los funtores KV_*' son invariantes homotópicos.

   (c) Si $n \geq 1$, el funtor $N_n(GL(\Delta^{pol}(\ \ ))$ envía la sucesión

   $$0 \to \Omega A \to PA \to A \to 0$$

   en una sucesión exacta. El funtor $N_0(GL(\Delta^{pol}(\ \ ))$ aplica esta sucesión en la sucesión exacta

   $$1 \to GL(\Omega A) \to GL(PA) \to GL(A)$$

   La imagen del último morfismo es $GL(A)_0$.

   (d) Para todo $n \geq 1$, $KV_n'(A) = KV_n(A)$.

10. Sean $R \ni 1$ un anillo, $I \lhd R$ un ideal. Se define el *subgrupo elemental relativo* $E(R : I) \lhd E(R)$ como el mínimo subgrupo normal que contiene a los elementos $\epsilon_{ij}(x)$, $x \in I$, $i \neq j$. El K_1 relativo al par (R, I) es

    $$K_1(R : I) := GL(I)/E(R : I)$$

    (a) Probar que $K_1(R : I)$ es un grupo abeliano.

    (b) Probar que la inclusión $GL(I) \subset GL(R)$ induce un morfismo $K_1(R : I) \to K_1(R)$ de modo que la sucesión

    $$K_1(R : I) \to K_1(R) \to K_1(R/I)$$

    es exacta.

    (c) Si $R \to R/I$ es retracción, entonces $K_1(R : I) \to K_1(R)$ es inyectiva.

    (d) Probar que $K_1(I^+ : I) = K_1(I)$.

    (e) Sean k un cuerpo y $R_1' \subset R_1 \subset M_2(k)$ los subanillos

    $$M_2(k) \supset R_1 := ke_{11} + ke_{12} + ke_{22} \supset R_1' := k(e_{11} + e_{22}) + ke_{12}$$

    Sea $I = ke_{12}$; I es un ideal tanto de R' como de R. Calcular $K_1(R_1 : I)$, $K_1(R_1' : I)$ y $K_1(I)$.

11. Sean R un anillo, $I, J \lhd R$ ideales, $x, y \in R$. Ponemos

    $$[x, y] := xy - yx$$
    $$[I, J] = \text{subgrupo generado por los elementos } [i, j], \quad i \in I, \quad j \in J$$
    $$HC_0(R) = R/[R, R]$$
    $$HC_0(R : I) = I/[R, I]$$

    Nota: si R es unital y $x, y \in R$ son inversibles, escribiremos su conmutador multiplicativo con $(,)$ en lugar de $[,]$, es decir:

    $$(x, y) := xyx^{-1}y^{-1}$$

    (a) Probar que hay una sucesión exacta

    $$HC_0(R : I) \to HC_0(R) \to HC_0(R/I) \to 0$$

    (b) Si $R \to R/I$ es retracción, entonces $HC_0(R : I) \to HC_0(R)$ es inyectiva.

    (c) Calcular $HC_0(I^+ : I)$.

12. Sea $I \lhd R$ un ideal de un anillo unital, tal que $I^2 = 0$. Sea

$$\nu : GL(I) \to I, \qquad \nu(1+x) = x$$

(a) Probar que ν es morfismo de grupos.

(b) Sean $x \in GL(I)$, $r \in R$. Probar que

$$\nu((1+x)^{\epsilon_{ij}(r)}) = [x_{ji}, r].$$

Deducir que ν induce un morfismo

$$\nu : K_1(R : I) \to HC_0(R : I). \tag{3}$$

(c) Sea $s : I \to GL(I)$, $s(x) = 1 + xe_{11}$. Probar que s es morfismo, que $\nu \circ s = 1$, y que la composición de s con la proyección $GL(I) \to K_1(R : I)$ es suryectiva.

(d) Probar las fórmulas

$$s([r,x]) = (1 + [re_{12}, xe_{21}])(1 + [e_{21}, xre_{12}])$$
$$1 + [re_{12}, xe_{21}] = (\epsilon_{12}(r), \epsilon_{21}(x))\epsilon_{12}(rxr)$$

Concluir que s induce un morfismo

$$s : HC_0(R : I) \to K_1(R : I) \tag{4}$$

(e) Probar que (3) y (4) son isomorfismos inversos.