Fórmulas de Integración Numérica

Ejercicio 1 Se desea aproximar

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x}$$

donde $\hat{T}$ es el triángulo de referencia como se muestra en la Figura 1. Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{2}f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

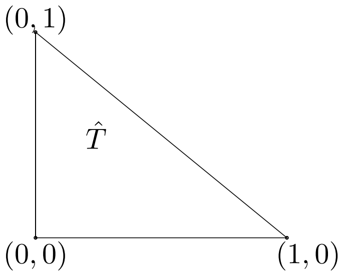

Figura 1

Ejercicio 2 Mostrar que la fórmula de integración numérica

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \sim \frac{1}{6}(f(\frac{1}{2},0)+f(0,\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2.

Ejercicio 3 Sea T un triángulo genérico de vertices a_1, a_2, a_3 como muestra la Figura 2.

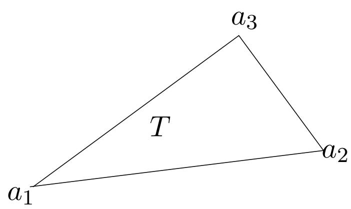

Figura 2

Sea $F(\hat{x}) = B\hat{x}+b$ la transformación afín que manda $\hat{T}$ en T. Usando el ejercicio 1 y haciendo un cambio de variables mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim |T| f(a_{123})$$

donde a_{123} es el baricentro del triángulo T, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 4 Procediendo en forma análoga al ejercicio previo y usando el ejercicio 2, mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{3}(f(a_{12}) + f(a_{13}) + f(a_{23}))$$

donde $a_{ij}, i < j$ denota el punto medio del lado de vértices a_i y a_j, es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2. (ver Figura 3)

Ejercicio 5 En forma análoga a los ejercicios previos mostrar que la fórmula de cuadratura

$$\int_T f(x)dx \sim \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=1}^{3} f(a_i) + 8 \sum_{1\leq i<j\leq 3} f(a_{ij}) + 27 f(a_{123}))$$

es exacta para polinomios de grado menor o igual que 3. (ver Figura 3)

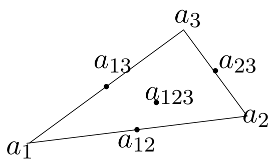

Figura 3