Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones

Primer Cuatrimestre de 2010.

Teorema de Rellich-Kondrachov

En lo que sigue, demostraremos el Teorema de Rellich Kondrachov. Se usó principalmente como referencia el libro de L.Evans, Partial Differential Equations, AMS, Providence, 1998.

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y con borde C^1. Si $1 \leq p < N$, entonces para todo $1 \leq q < p^*$ se tiene:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega).$$

Es decir, la inclusión es compacta. Aquí, p^* es el llamado conjugado de Sobolev de p, definido tal que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ($p^* = \frac{pN}{N-p}$).

Definición 1 *Sean X, Y dos espacios métricos, decimos que $X \subset\subset Y$ (X está incluido compactamente en Y), si por un lado la inclusión $X \to Y$ es continua y además, para toda sucesión acotada $\{x_n\}_n \subset X$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_j$ convergente en Y ($\{x_n\}$ es precompacta en Y) .*

Demostración

(I) Probemos primero la inclusión continua.

Sea $1 \leq p < N$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Por el Teorema de Extensión, existe una $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de soporte compacto, $\tilde{u}|_\Omega \equiv u$ y además existe una constante $C = C_{N,p,\Omega}$, tal que

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ahora, ya que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, podemos tomar una sucesión $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to \tilde{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Probemos entonces el resultado primero para $q = p^*$. Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev: $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_L^p(\mathbb{R}^N)$, si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

Es decir, como $\{u_n\}$ es de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, también lo es en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Con lo cual también $u_n \to \tilde{u}$ en $L^{p*}(\mathbb{R}^N)$

Usando la desigualdad triangular, se tiene que:

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tilde{u} - u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$$

Finalmente, usando nuevamente $G - N - S$ y el resultado de convergencia, obtenemos

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Ahora si pegando todo:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Sea ahora $1 \leq q < p^*$:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha q}\right)^{\frac{1}{\alpha q}} \left(\int_\Omega 1^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha' q}}$$

Habiendo hecho Holder con las funciones $|u|$ y 1 y los exponentes α, α' tal que $q\alpha = p^*$, es decir $\alpha = \frac{p^*}{q} > 1$, ya que $q < p^*$

Resulta entonces, usando que vale para $q = p^*$:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Lo que prueba finalmente la inclusión deseada.

(II) Faltaría ver que es compacta.

Sea $\{u_n\}_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ una sucesión acotada. Por lo que acabamos de probar:

$$\|u_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty \qquad (1 \leq q \leq p^*)$$

Queremos probar que existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}_j$ convergente en $L^q(\Omega)$. Para eso, veremos que existe una subsucesión de Cauchy en $L^q(\Omega)$.

Podemos suponer, mediante el Teorema de Extensión, que $\{u_n\}_n \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y que existe un $V \supset \Omega$ tal que $sop(u_n) \subset V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \infty$.

Procedamos ahora a regularizar la sucesión. Recordemos las funciones:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c\, e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

con c tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, dx = 1$. Esta $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $sop(\varphi) = B_1(0)$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, las funciones $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ también resultan $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $sop(\varphi_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definiendo entonces $u_n^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos suponer $sop(u_n^\varepsilon) \subset V$.

Veamos que $u_n^\varepsilon \to u_n$ en $L^q(V)$ cuando $\varepsilon \to 0$, y uniformemente en n en el caso que las $u_n \in C^1(V)$:

$$u_n^\varepsilon(x) - u_n(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)(u_n(x-y) - u_n(x))dy = \int_{B_1(0)} \varphi(y)(u_n(x-\varepsilon y) - u_n(x))dy$$

La última igualdad viene de realizar el cambio de variables $y = \frac{y}{\varepsilon}$. Ahora, escribiendo $u_n(x-\varepsilon y) - u_n(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u_n(x-\varepsilon ty)dt$, llegamos a

$$u_n^\varepsilon(x) - u_n(x) = \int_{B_1(0)} \varphi(y) \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} u_n(x-\varepsilon ty)dt \right] dy = -\varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(y) \int_0^1 \nabla u_n(x-\varepsilon ty) y \, dt \, dy$$

Tomando módulo, integrando en V y acotando las integrales, resulta

$$\int_V |u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_V \int_{B_1(0)} \varphi(y) \int_0^1 |\nabla u_n(x-\varepsilon ty)| \, dt \, dy \, dx$$

Cambiando el orden de integración resulta

$$\int_V |u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(y) \int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_n(x-\varepsilon ty)| \, dx \right) dt \, dy$$

ahora, cambiando variable en la primera integral $z = x - \varepsilon ty$, $dz = dx$.

$$\int_V |u_n^\varepsilon(x) - u_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(y) \int_0^1 \|\nabla u_n\|_{L^1(V)} dt \, dy = \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^1(V)}$$

con lo cual acabamos de probar que $\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^1(V)}$ si las u_n son suaves. Notar que por densidad el resultado también vale para funciones $u_n \in W^{1,p}(V)$. Tenemos entonces que

$$u_n^\varepsilon \to u_n \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0 \qquad \text{en } L^1(V) \qquad \text{uniformemente en } n$$

Usaremos ahora la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\|v\|_{L^q} \leq \|v\|_{L^s}^\theta \|v\|_{L^r}^{1-\theta}$$

siempre que $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{r}$, $s < q < r$.

Con lo cual, si $\|v_n\|_{L^r}$ está acotado y $\|v_n\|_{L^s} \to 0$, entonces valdrá que $\|v_n\|_{L^q} \to 0$.

En nuestro caso $1 = s < q < r = p^*$ (acá es donde no va a valer si $q = p^*$) y $0 < \theta < 1$:

$$\|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^q(V)} \leq \|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^1(V)}^\theta \|u_n^\varepsilon - u_n\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

La norma en L^1 por lo que vimos tiende a 0 uniformemente en n cuando $\varepsilon \to 0$. Además, la norma en L^{p*} está acotada por la desigualdad de G-N-S por la norma $W^{1,p}$, que está acotada uniformemente. Por lo tanto, tenemos que

$$u_n^\varepsilon \to u_n \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0 \qquad \text{en } L^q(V) \text{ uniformemente en } n.$$

Veamos entonces que $\{u_n^\varepsilon\}$ es equicontinua y equiacotada en $L^q(V)$ para todo $\varepsilon > 0$ fijo:

$$|u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |u_n(y)|\varphi_\varepsilon(x-y)dy \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_n\|_{L^1(V)} \leq \frac{1}{\varepsilon^N}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C}{\varepsilon^N}$$

La anterior cota prueba que la sucesión está equiacotada ya que es válida para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Para la equicontinuidad recordemos que debido al Teorema de los Valores Intermedios:

$$|u_n^\varepsilon(x) - u_n^\varepsilon(y)| \leq |x-y||\nabla u_n^\varepsilon(\xi)| \qquad \xi \in int(x,y)$$

Con lo cual basta probar una cota uniforme para el gradiente:

$$|\nabla u_n^\varepsilon(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |u_n(y)||\nabla\varphi_\varepsilon(x-y)|dy \leq \frac{1}{\varepsilon^{N+1}}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_n\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}}$$

Por Arzelá-Ascoli, existe $\{u_{n_j}^\varepsilon\}$ de Cauchy con $\|u_{n_j}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\|_{L^\infty(V)} \to 0$ y $\|u_{n_j}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} \leq \|u_{n_j}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\|_{L^\infty(V)} \to 0$. Tenemos entonces que:

$$\|u_{n_j} - u_{n_k}\|_{L^q(V)} \leq \|u_{n_j} - u\varepsilon_{n_j}\|_{L^q(V)} + \|u_{n_j}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} + \|u_{n_k}^\varepsilon - u_{n_k}\|_{L^q(V)}$$

Como probamos que $u_n^\varepsilon \to u_n$ en $L^q(V)$, dado $\delta > 0$, elijo un $\varepsilon > 0$ suficientemente chico tal que para todo n_j, n_k

$$\|u_{n_j} - u_{n_j}^\varepsilon\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{3}, \qquad \|u_{n_k}^\varepsilon - u_{n_k}\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{3}$$

Ahora, para ese ε fijo, uso que la subsucesión es convergente, con lo cual elijo n_j, n_k tal es que

$$\|u_{n_j}^\varepsilon - u_{n_k}^\varepsilon\|_{L^\infty}^q < \frac{\delta}{3}$$

Tomando ahora $\delta = 1, \frac{1}{2}, ...\frac{1}{n}, ...$ y mediante un argunmento diagonal ueda demostrado el teorema.■

Manuel Maurette