El objetivo es demostrar que $C^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

Sea J una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, no negativa, con las siguientes propiedades:

(i) $J(x) = 0$ si $|x| \geq 1$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)dx = 1$.

Por ejemplo

$$J(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{si} |x| < 1 \\ 0 & \text{si} |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde k es elegida para que se satisfaga la condición (ii).

Definimos $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} J(\frac{x}{\epsilon})$. $J_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cumple:

(i) $J_\epsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \epsilon$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x)dx = 1$.

Vamos a definir

$$J_\epsilon * u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy$$

Lema 0.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea u una función definida en $\mathbb{R}^n$, que vale 0 afuera de Ω*

(i) *si $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, entonces $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*

(ii) *si $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $J_\epsilon * u \in L^p(\Omega)$ y*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ||J_\epsilon * u - u||_{L^p(\Omega)} = 0$$

Demostración: Veamos primero que la convolución $J_\epsilon * u$ está definida en $\mathbb{R}^n$, para eso hay que ver que la siguiente integral es finita

$$\int_{\mathbb{R}^n} |J_\epsilon(x-y)||u(y)|dy$$

como la función que estamos integrando se anula afuera de $C_x = B_\epsilon(x) \cap \Omega$, y la función $|J_\epsilon|$ es acotada en C_x pues es continua. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |J_\epsilon(x-y)||u(y)|dy \leq \int_{\overline{C_x}} C|u(y)|dy < \infty$$

pues $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y $\overline{C_x}$ es un compacto de $\overline{\Omega}$.

Veamos ahora que

$$D^\alpha(J_\epsilon * u)(x) = (D^\alpha J_\epsilon) * u(x)$$

basta ver que

$$D_{x_i}(J_\epsilon * u)(x) = (D_{x_i} J_\epsilon) * u(x)$$

$$\left|\frac{J_\epsilon * u(x+he_i) - J_\epsilon * u(x)}{h} - (D_{x_i}J_\epsilon) * u(x)\right| =$$
$$\left|\frac{\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y+he_i)u(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy}{h} - \int_{\mathbb{R}^n} D_{x_i}J_\epsilon(x-y)u(y)dy\right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{J_\epsilon(x-y+he_i) - J_\epsilon(x-y)}{h} - D_{x_i}J_\epsilon(x-y)\right||u(y)|dy$$

la función que estamos integrando tiene soporte en $\Omega \cap (B_\epsilon(x+he_i) \cup B_\epsilon(x))$. Si y es tal que $|x+he_i-y| < \epsilon$ y $|h| < 1$, entonces $|x-y| < |x-y+he_i| + |he_i| < \epsilon + 1$. Luego para $|h| < 1$ se tiene que el soporte del integrando está en $K_x = \Omega \cap B_{\epsilon+1}(x)$. Luego para $|h| < 1$

$$\left|\frac{J_\epsilon * u(x+he_i) - J_\epsilon * u(x)}{h} - (D_{x_i}J_\epsilon) * u(x)\right| \leq$$
$$\int_{\overline{K_x}}\left|\frac{J_\epsilon(x-y+he_i) - J_\epsilon(x-y)}{h} - D_{x_i}J_\epsilon(x-y)\right||u(y)|dy$$

Sabemos que

$$\left|\frac{J_\epsilon(x-y+he_i) - J_\epsilon(x-y)}{h} - D_{x_i}J_\epsilon(x-y)\right| < \delta$$

para $|h| < \tilde{h}(y,\delta)$. Osea, para todo $y \in \overline{K_x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{J_\epsilon(x-y+he_i) - J_\epsilon(x-y)}{h} = D_{x_i}J_\epsilon(x-y)$$

pero como $\overline{K_x}$ es un compacto, la convergencia es uniforme. Entonces para $|h| < \tilde{h}(\delta)$ se tiene

$$\left|\frac{J_\epsilon(x-y+he_i) - J_\epsilon(x-y)}{h} - D_{x_i}J_\epsilon(x-y)\right| < \delta$$

para todo $y \in \overline{K_x}$. Luego para $|h| < \tilde{h}(\delta)$

$$\left|\frac{J_\epsilon * u(x+he_i) - J_\epsilon * u(x)}{h} - (D_{x_i}J_\epsilon) * u(x)\right| \leq \delta\int_{\overline{K_x}}|u(y)|dy$$

Esto demuestra que

$$D_{x_i}(J_\epsilon * u)(x) = (D_{x_i}J_\epsilon) * u(x)$$

de lo que se deduce que $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pues observemos que lo único que usamos de J_ϵ es que tiene soporte en B_ϵ, y que es continua y derivable.

Supongamos ahora que $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ (lo que implica que $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$), entonces $p' = \frac{p}{p-1}$, y usando la desigualdad de Hölder obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
|J_\epsilon * u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)^{1/p'} J_\epsilon(x-y)^{1/p} |u(y)| dy \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)dy \right\}^{1/p'} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J_\epsilon * u(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)dxdy = ||u||^p_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

Veamos que esto también vale para $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |J_\epsilon * u(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)u(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|u(y)|dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|dy = ||u||_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Demostramos que si $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $J_\epsilon * u \in L^p(\Omega)$ y ademas

$$||J_\epsilon * u||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} \tag{1}$$

Sea $\eta > 0$, y sea $\phi \in C_0(\Omega)$ tal que $||\phi - u||_{L^p(\Omega)} < \eta/3$. Luego por (1), $||J_\epsilon * u - J_\epsilon * \phi||_{L^p(\Omega)} < \eta/3$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
||J_\epsilon * u - u||_{L^p(\Omega)} &\leq ||\phi - u||_{L^p(\Omega)} + ||J_\epsilon * u - J_\epsilon * \phi||_{L^p(\Omega)} + ||J_\epsilon * \phi - \phi||_{L^p(\Omega)} \\
&< \frac{2\eta}{3} + ||J_\epsilon * \phi - \phi||_{L^p(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Usando que $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x)dx = 1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|(J_\epsilon * \phi - \phi)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\phi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\phi(x)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)|\phi(y)-\phi(x)|dy \\
&= \int_{|x-y|<\epsilon} J_\epsilon(x-y)|\phi(y)-\phi(x)|dy \\
&\leq \sup_{y:|x-y|<\epsilon} |\phi(y)-\phi(x)| \int_{|x-y|<\epsilon} J_\epsilon(x-y)dy \\
&= \sup_{y:|x-y|<\epsilon} |\phi(y)-\phi(x)|
\end{aligned}
$$

Como ϕ es uniformemente continua en Ω, para cualquier $\delta > 0$ existe $\tilde{\epsilon}(\delta) > 0$ tal que $\sup_{|x-y|<\epsilon} |\phi(y) - \phi(x)| < \delta$ para todo $x \in \Omega$, para todo $\epsilon < \tilde{\epsilon}$. Luego para $\epsilon < \tilde{\epsilon}$

$$
\int_\Omega |(J_\epsilon * \phi - \phi)(x)|^p dx \leq \int_\Omega \delta^p dx = \delta^p |\Omega|
$$

Luego

$$
||J_\epsilon * \phi - \phi||_{L^p(\Omega)} \leq \delta |\Omega|^{1/p}
$$

Tomamos

$$
\delta(\eta) = \frac{\eta}{3|\Omega|^{1/p}}
$$

Entonces , para todo $\epsilon < \tilde{\epsilon}(\eta)$, tenemos

$$
||J_\epsilon * \phi - \phi||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\eta}{3}
$$

Luego, de esto y de (2) obtenemos, que para todo $\epsilon < \tilde{\epsilon}(\eta)$

$$
||J_\epsilon * u - u||_{L^p(\Omega)} < \eta
$$

Lema 0.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y $\Omega' \subset\subset \Omega$. Sea J_ϵ la función definida anteriormente. Luego*

$$
\lim_{\epsilon \to 0^+} J_\epsilon * u = u \quad en\ W^{k,p}(\Omega')
$$

Demostración: Observemos primero que como Ω es acotado, entonces $u \in L^1(\Omega)$, entonces $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, lo que implica que $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $\epsilon < dist(\Omega', \partial\Omega)$. Para toda función $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} J_\epsilon * u(x) D^\alpha \phi(x) dx &= \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\bar{u}(y) dy D^\alpha \phi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z)\bar{u}(x-z) dz \overline{D^\alpha \phi}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(z) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x-z)\overline{D^\alpha \phi}(x) dx dz \\
&= \int_{B_\epsilon} J_\epsilon(z) \int_{\Omega'} u(x-z) D^\alpha \phi(x) dx dz \\
&= \int_{B_\epsilon} J_\epsilon(z)(-1)^\alpha \int_{\Omega'} D^\alpha u(x-z)\phi(x) dx dz \\
&= (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\overline{D^\alpha u}(y) dy \bar{\phi}(x) dx \\
&= (-1)^\alpha \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\overline{D^\alpha u}(y) dy \phi(x) dx \\
&= (-1)^\alpha \int_{\Omega'} J_\epsilon * D^\alpha u(x)\phi(x) dx
\end{aligned}$$

luego, $D^\alpha J_\epsilon * u = J_\epsilon * D^\alpha u$ en Ω'.

Como $D^\alpha u \in L^p(\Omega')$, entonces, por el Lema 0.1

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} ||D^\alpha(J_\epsilon * u) - D^\alpha u||_{L^p(\Omega')} = \lim_{\epsilon \to 0^+} ||J_\epsilon * D^\alpha u - D^\alpha u||_{L^p(\Omega')} = 0$$

Teorema 0.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 0$, entonces para todo $\eta > 0$ existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$||\phi - u||_{W^{k,p}(\Omega)} < \eta$$

Demostración: Para $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k \text{ y } dist(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

$\Omega_0 = \emptyset$ y $\Omega_{-1} = \emptyset$. Es claro que $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$. Sea

$$\mathcal{O} = \{U_k : U_k = \Omega_{k+1} \cap \overline{\Omega_{k-1}}^c, k \in \mathbb{N}\}$$

es una colección de subconjuntos abiertos de Ω, que cubre Ω. Los U_k forman una cadena de anillos, y cada anillo tiene interseccion solo con el anterior y con el siguiente. Sea Ψ una C^∞-partición de la unidad de Ω subordinada a $\mathcal{O}$. Sea ψ_k la suma de las finitas funciones de Ψ que tienen soporte contenido en U_k. Luego $\psi_k \in C_0^\infty(U_k)$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1 \text{ en } \Omega$$

Para $\epsilon < 1/(k+1)(k+2)$ se tiene $J_\epsilon * (\psi_k u)$ tiene soporte en $\Omega_{k+2} \cap (\Omega_{k-2})^c = \mathcal{V}_k \subset\subset \Omega$:

$$J_\epsilon * (\psi_k u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\psi_k(y)u(u)dy$$

Veamos que si x no esta en $\Omega_{k+2} \cap \Omega^c_{k-2}$, entonces $J_\epsilon * (\psi_k u)(x) = 0$.Hagamos el caso $k > 2$, hay que ver que si $y \in U_k$ entonces $|x - y| \geq \epsilon$. Como $y \in U_k$ entonces

1) $|y| < k+1$ y $dist(y, \partial\Omega) > 1/(k+1)$,
2) $|y| > k-1$ o $dist(y, \partial\Omega) < 1/(k-1)$.

Como x no pertenece a $\Omega_{k+2} \cap (\Omega_{k-2})^c$, entonces se cumple alguna de la siguientes cosas:

i) x no esta en Ω,
ii) x esta en Ω pero $|x| \geq k+2$ o $dist(x, \partial\Omega) \leq 1/(k+2)$,
iii) x esta en Ω pero $|x| < k-2$ y $dist(x, \partial\Omega) > 1/(k-2)$.

Supongamos primero x esta en Ω pero $|x| \geq k+2$, entonces $|x-y| \geq |x| - |y| \geq (k+2) - (k+1) = 1$. Supongamos ahora x esta en Ω pero $dist(x, \partial\Omega) < 1/(k+2)$, entonces

$$dist(y, \partial\Omega) \leq |x - y| + dist(x, \partial\Omega)$$

luego

$$\epsilon < \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} < |x-y|$$

Supongamos ahora x esta en Ω pero $|x| < k-2$ y $dist(x, \partial\Omega) > 1/(k-2)$, si $|y| > k-1$ entonces

$$|x-y| \geq |y| - |x| > (k-1) - (k-2) = 1$$

y sino, $dist(y, \partial\Omega) < 1/(k-1)$, entonces

$$dist(x, \partial\Omega) < |x-y| + dist(y, \partial\Omega)$$

luego

$$\epsilon < \frac{1}{(k-2)(k-1)} = \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} < |x-y|$$

Por último, si x no esta en Ω, entonces

$$|x-y| \geq dist(y, \partial\Omega) > \frac{1}{k+1} > \epsilon$$

Como $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$ y tiene soporte en $U_k \subset \mathcal{V}_k$, luego podemos elegir ϵ_k

$$||J_{\epsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u||_{m,p,\Omega} = ||J_{\epsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u||_{m,p,\mathcal{V}_k} < \frac{\eta}{2^k}$$

Sea

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\epsilon_k} * (\psi_k u)$$

Para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$ solo finitos términos de la suma no se anulan, luego $\phi \in C^\infty(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
||u-\phi||_{m,p,\Omega} &= ||\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k u - \sum_{k=1}^{\infty} J_{\epsilon_k} * (\psi_k u)||_{m,p,\Omega} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} ||\psi_k u - J_{\epsilon_k} * (\psi_k u)||_{m,p,\Omega} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} = \eta
\end{aligned}
$$