Nuestro objetivo es probar un teorema que nos permita aproximar una función de $W^{k,p}(\Omega)$ por funciones regulares hasta la clausura.Para obtener resultados de este estilo, tenemos que pedirle a $\partial\Omega$ alguna condición extra.En este caso, basandonos en el libro de Evans, vamos a exponer un resultado que necesita que $\partial\Omega$ sea $C^1(\Omega)$.En el libro de Adams, por ejemplo, se puede encontrar el resultado pidiendo que $\partial\Omega$ sea Lipchitz.

Antes de enunciar el teorema debemos repasar el concepto de borde C^1

Definition 0.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, decimos que $\partial\Omega$ es C^k, si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe $B = B_r(x_0)$ y $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que

$$\Omega \cap B = \{x \in B : x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema.

Theorem 0.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $\partial\Omega$ de clase C^1, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ entonces existe $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que$\|u - u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$.*

Proof. Fijo $x^0 \in \partial\Omega$.Como $\partial\Omega$ es C^1,simplemente aplicando la definición sabemos que, existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

Sea $V := \Omega \cap B(x^0, \frac{r}{2})$.

Por otro lado definimos,

$$x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n \quad (x \in V, \varepsilon > 0),$$

la idea acá es "subir" el punto para que se encuentre despegado de la frontera.Luego, considerando λ fijo, para ε chico tenemos que $B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \Omega \cap B(x_0, r)$. Ahora definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$, esta es la función u trasladada $\lambda\varepsilon$ en la dirección e_n.Consideramos la siguiente función:

$$\eta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{en } |x| < 1 \\ 0 & \text{en } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Donde c es la constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x); dx = 1$.Notemos que $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $sop\eta \subset B(0,1)$. Dado $\varepsilon > 0$ definimos $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$.Por último consideramos $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$, tenemos que $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$. En efecto, Sea $x \in \Omega_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} D^\alpha v^\varepsilon &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(y)\,dy \end{aligned}$$

Para $x \in \Omega_\varepsilon$ la función $\phi(y) := \eta_\varepsilon(x-y)$ pertenece a $C_c^\infty(\Omega)$. Entonces tenemos que

$$\int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)Du_\varepsilon(y)\,dy$$

Juntando las dos nos queda

$$\begin{aligned} D^\alpha v^\varepsilon(x) &= (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u_\varepsilon(y)\,dy \\ &= [\eta_\varepsilon * D^\alpha u_\varepsilon](x) \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $D^\alpha v^\varepsilon \to D^\alpha u_\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$, para $|\alpha| \leq k$. Veamos ahora que $v^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}(V)$.En efecto, $\forall \alpha \leq k$

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}$$

El segundo termino del lado derecho tiende a cero con ε debido a que la norma L^p es continua y el primer termino ya habiamos visto que tiende a 0.

Elegimos $\delta > 0$.Como $\partial\Omega$ es compacta , podemos encontrar una cantidad finita de puntos $x_i^0 \in \partial\Omega$, radio $r_i > 0$, correspondiente a los conjuntos $V_i = \Omega \cap B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$ y funciones $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})(i = 1, ..., N)$ tales que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=0}^n B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$ y

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta$$

Elegimos $V_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^n V_i$ y por lo mismo de antes sabemos que existe $v_0 \in C^\infty(\overline{V_0})$ que satisface:

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta$$

Tomamos $\{\zeta_i\}$ una partición de la unidad subordinada a los conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i=0}^n$ en Ω.Definimos $v := \sum_{i=0}^n \zeta_i v_i$. Notemos que $v \in C^\infty\overline{\Omega}$.

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v - D^\alpha u\| &\leq \sum_{i=0}^n \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\| = \sum_{i=0}^n \|D^\alpha(\zeta_i(v_i - u)\| \\ &= \sum_{i=0}^n \| \sum_{\beta \leq \alpha} D^\beta \zeta_i D^{\alpha-\beta}(v_i - u)\|\end{aligned}$$

Acotando po $\|D^\beta \zeta_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ nos queda que

$$\|D^\alpha v - D^\beta u\| \leq \sum_{i=0}^n C\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq Cn\delta$$

Con esto termina la demostración $\square$