Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones

Teoremas de Extensión para espacios de Sobolev

Formulación del problema

Dado un dominio abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ correspondiente, se busca extender a las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ a todo $\mathbb{R}^N$ de modo que resulten funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Más precisamente, el problema consiste en definir (si es posible) un operador lineal E tal que

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{1}$$

con

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La existencia de este operador dependerá de la geometría de $\partial\Omega$. En particular, existen operadores de extensión para dominios Lipschitz y no más que eso. Es decir, hay dominios que no son Lipschitz en donde no se puede definir un operador de extension. En estas notas vamos a exponer la prueba para el caso de dominios de clase C^1 y comentaremos algunos aspectos de las pruebas del caso Lipschitz.

Algunos ejemplos

Extensión por cero:

Definición 1 *Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida en un dominio Ω, se define su "extensión por cero" como:*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega^c \end{cases} \tag{3}$$

Tenemos el siguiente lema.

Lema 2 *Sea Ω un abierto arbitrario. Consideremos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y tomemos una función suave $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Entonces $\overline{\varphi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\frac{\partial \overline{\varphi u}}{\partial x_i} = \overline{\varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u} \tag{4}$$

y además existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\overline{\varphi u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad 1 \leq i \leq N \tag{5}$$

La misma conclusión puede obtenerse si en vez de tomar $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ se toma $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\nabla\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ y sop(φ) $\in \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$. En ese caso, se obtiene que

$$\frac{\partial \overline{\varphi u}}{\partial x_i} = \varphi \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\overline{u} \tag{6}$$

Demostración: Dada $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi u}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx &= \int_\Omega \varphi u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx & (7)\\
&= \int_\Omega u\left(\frac{\partial \varphi\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\psi\right)\, dx & (8)\\
&= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\psi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\psi\, dx & (9)\\
&= -\int_\Omega \left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\psi\, dx & (10)\\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}\psi\, dx & (11)
\end{aligned}$$

La constante C se elige de modo que

$$C \geq \max\left\{\|\varphi\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty} : 1 \leq i \leq N\right\} \tag{12}$$

■

Como consecuencia de este lema, tenemos un resultado de extensión. Supongamos que, para cierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ podemos extender funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ con $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$. Podemos entonces encontrar una función suave $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Entonces la función $\overline{\varphi u}$ es la extensión de u a $W^{1,p}(\Omega)$.

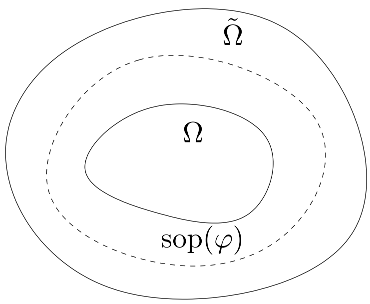

Figura 1: Extensión por cero

Se podría preguntar si la extensión por cero descripta arriba se puede hacer directamente, sin el cut-off suave. La respuesta es que no, por la misma razón que la funciones características no están en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Veamos el caso de dimensión 1. Sea $\Omega = (a, b)$. Consideremos la función $u = \chi_\Omega$ y tratemos de extenderla por cero fuera. Sea φ una función test tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \cap \Omega \neq 0$. Si $\overline{u}$ está en $W^{1,p}(\mathbb{R})$, debe existir una derivada débil $\overline{u}'$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi' \, dx = -\int_{\mathbb{R}} \overline{u}'\varphi \, dx. \tag{13}$$

Pero la primera integral es justamente

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi' \, dx = \int_a^b \varphi' \, dx = \varphi(b) - \varphi(a) \tag{14}$$

Entonces, la derivada débil de $\overline{u}$, como distribución, satisface

$$\overline{u}'(\varphi) = \delta_a(\varphi) - \delta_b(\varphi) \tag{15}$$

donde δ_p es la distribución delta centrada en p. Concluimos que entonces $\overline{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Un dominio no Lipschitz que no admite extensión

Consideremos el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ definido como

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^\gamma, \gamma > 1\} \tag{16}$$

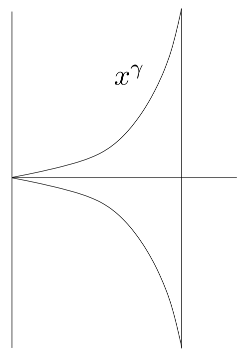

Figura 2: Dominio con cúspide exterior

Consideremos la función $u_\varepsilon(x, y) = x^{-\frac{\varepsilon}{p}}$ con $0 < \varepsilon < \gamma$. Entonces

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{p} x^{-\frac{\varepsilon}{p}-1} \tag{17}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right|^p dx = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^p \int_0^1 \int_{-x^\gamma}^{x^\gamma} x^{-p(\frac{\varepsilon}{p}+1)}\, dxdy \tag{18}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^p 2\int_0^1 x^{-p(\frac{\varepsilon}{p}+1)+\gamma}\, dx \tag{19}$$

La última integral es finita si $p < \gamma + 1 - \varepsilon$. Como $\gamma > 1$, concluimos que para cualquier $p > 2$ se puede elegir un ε tal que $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$. Si valiera un operador de extensión $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tendríamos que Eu_e está en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pero sabemos que para $\mathbb{R}^N$ vale el teorema de inmersión de Sobolev. Para $p > 2$, como $1 > \frac{2}{p}$ ($k > \frac{N}{p}$) se tiene la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N)$, lo que es imposible.

Extensión por reflexión (Nikolskij)

Notación

Vamos a trabajar en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$. Escribimos a un punto típico de $\mathbb{R}^N$ como

$$x = (x', x_N) \qquad \text{con } x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \tag{20}$$

Además,

$$\mathbb{R}^N_+ = \{(x', x_N) : x_N > 0\}$$
$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < 1; 1 \leq i \leq N\}$$
$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+$$
$$Q_0 = Q \cap \{x_N = 0\}$$

Lema 3 *Sea $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Definimos*

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{si} \quad x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{si} \quad x_N < 0 \end{cases} \tag{21}$$

Entonces $u^* \in W^{1,p}(Q)$ y $\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}$

Demostración: Fijamos un poco más de notación. Dada $f : Q_+ \to \mathbb{R}$, definimos

$$u^\square(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{si} \quad x_N > 0 \\ -f(x', -x_N) & \text{si} \quad x_N < 0 \end{cases} \tag{22}$$

Vamos a ver que u^* tiene derivadas débiles dadas por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \qquad 1 \leq i \leq N-1 \\ \frac{\partial u^*}{\partial x_N} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^\square \end{aligned} \tag{23}$$

Consideremos una función $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta(t) = 1$ si $|t| \geq 1$ y $\eta(t) = 0$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$.

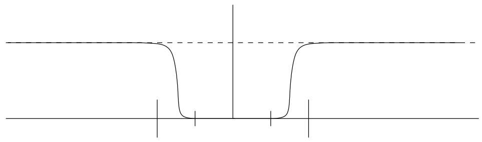

Figura 3: Bump

Definimos a partir de esta función la sucesión η_k por la fórmula $\eta_k(t) = \eta(kt)$.

Para verificar (23), consideremos $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ y veamos primero el caso $1 \leq i \leq N-1$. Tenemos que ver que

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \varphi\, dx \tag{24}$$

Reescribimos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{Q_-} u(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N)\, dx \\
&= \int_{Q_+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{Q_+} u(x', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_N)\, dx \\
&= \int_{Q_+} u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_N)\right)\, dx
\end{aligned}$$

Si ponemos $\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$, nos queda que

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x', x_N)\, dx \tag{25}$$

Ahora tenemos una integral en Q_+, pero no podemos pasar la derivada porque ψ en general no está en $C_0^\infty(Q_+)$. Lo que hacemos entonces es considerar $\Phi_k(x', x_N) = \eta_k(x_N)\psi(x', x_N)$.

Entonces,

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}\, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Phi_k\, dx \tag{26}$$

Pero como $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x', x_N) = \eta_k(x_N) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x', x_N)$, concluimos que

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi\, dx. \tag{27}$$

En el límite, obtenemos

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx = -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\,dx. \tag{28}$$

Volvemos a (25)

$$\begin{aligned}
\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx &= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\,dx && (29)\\
&= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx - \int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi(x',-x_N)\,dx && (30)\\
&= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,dx - \int_{Q_-}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',-x_N)\varphi\,dx && (31)\\
&= -\int_Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*\varphi\,dx && (32)
\end{aligned}$$

Ahora veamos la derivada para el caso $i = N$. Tomemos otra vez $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ y definamos $\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Notemos que $\frac{\partial\psi}{\partial x_N} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_N} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', -x_N)$

Razonamos de manera análoga al caso anterior.

$$\begin{aligned}
\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\,dx &= \int_{Q_+} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\,dx + \int_{Q_-} u(x',-x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x',x_N)\,dx\\
&= \int_{Q_+} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\,dx + \int_{Q_+} u(x',x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x',-x_N)\,dx\\
&= \int_{Q_+} u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x',x_N) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x',-x_N)\right)\,dx\\
&= \int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_N}(x',x_N)\,dx
\end{aligned}$$

Introducimos otra vez a la sucsión η_k. Si ponemos

$$\Phi_k(x', x_N) = \eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \tag{33}$$

entonces $\Phi_k \in C_0^\infty(Q_+)$ y vale que

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_N}\,dx = -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_N}\Phi_k\,dx \tag{34}$$

Calculemos la derivada respecto de x_N de Φ_k:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_N}(x',x_N) &= \eta_k'(x_N)\psi(x',x_N) + \eta_k(x_N)\frac{\partial\psi}{\partial x_N}(x',x_N)\\
&= k\eta'(kx_N)\psi(x',x_N) + \eta_k(x_N)\frac{\partial\psi}{\partial x_N}(x',x_N)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\psi(x',x_N)\ dx + \int_{Q_+} u\eta_k \frac{\partial\psi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\Phi_k\ dx \qquad (35)$$

Veamos que en el límite, la primera integral se anula. Para eso observemos que

1. Como $\psi(x',0) = 0$ y es suave, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|\psi(x',x_N)| \leq M|x_N| \text{ en } Q \qquad (36)$$

2. Por definición de η, tenemos que $\eta'(kx_N) = 0$ si $kx_N > 1$, de modo que la integral sólo se considera en la región $0 < x_N < \frac{1}{k}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\psi(x',x_N)\ dx\right| &\leq kM \int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |x_N||u||\eta'(kx_N)|\ dx & (37)\\
&\leq \|\eta'\|_\infty Mk\frac{1}{k}\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|\ dx & (38)\\
&= C\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|\ dx \to 0 & (39)
\end{aligned}$$

Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_N}\ dx &= -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\psi\ dx & (40)\\
&= -\left(\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\varphi\ dx - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\varphi(x',-x_N)\ dx\right) & (41)\\
&= -\left(\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\varphi\ dx - \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x',-x_N)\varphi\ dx\right) & (42)\\
&= -\int_{Q} \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} \varphi\ dx. & (43)
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\ dx = \int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_N}\ dx = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square}\varphi\ dx.$$

Notemos que la desigualdad para las normas es evidente de la fórmula de extensión.

■

Algunas consecuecias: Es inmediato que la misma demostración vale para $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. También podemos combinar el Lema 3 con el Lema 2 y obtener resultados de extensión para dominios más generales.

Corolario 4 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio rectangular. Entonces existe un operador de extensión en Ω.*

Demostración: Consideremos el dominio $\tilde{\Omega}$ que resulta de reflejar sucesivamente a Ω en las cuatro direcciones. Sabemos que podemos extender a $\tilde{\Omega}$ por reflexión.

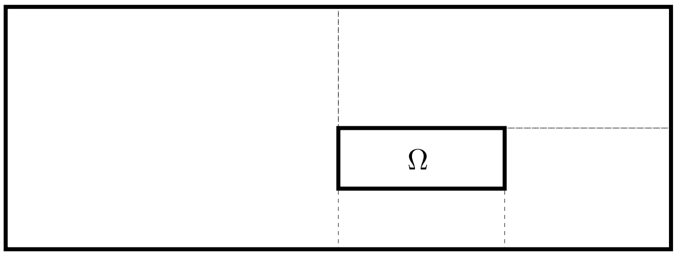

Figura 4: Cuatro reflexiones

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\text{sop}(\varphi) \in \tilde{\Omega}$ y además $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, el Lema 2 nos asegura que $\overline{\varphi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ con una desigualdad de normas que da la continuidad del operador de extensión. Claramente $\overline{\varphi u}|_\Omega = u$ ■

Teorema de extensión para dominios C^1

La idea es rectificar el borde localmente, de modo que se pueda aplicar el Lema 3. Las dos herramientas fundamentales para eso son el teorema de cambio de variables y las particiones de la unidad C^∞. Introducimos a continuación estos dos conceptos y damos una definición precisa de borde C^1.

Definición 5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que Ω es de borde C^1 si para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$ existe un entorno abierto U de x y una aplicación biyectiva $H : Q \to U$ tal que:*

1. $H \in C^1(\overline{Q})$
2. $H^{-1} \in C^1(\overline{U})$
3. $H(Q_+) = U \cap \Omega$
4. $H(Q_0) = U \cap \Gamma$

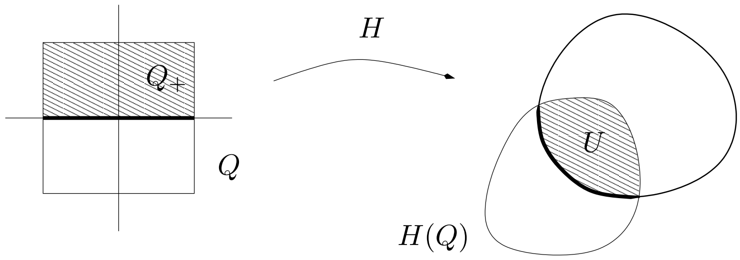

Figura 5: Borde C^1

Proposición 6 (Fórmula del cambio de variables) *Sean Ω y Ω' dos abiertos en $\mathbb{R}^N$ y $H : \Omega' \to \Omega$ una biyección tal que H, H^{-1} son de clase C^1 y las matrices jacobianas JH y JH^{-1} están en L^∞. Notamos con x a los elementos de Ω y $H(y) = x$.*

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ entonces $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ y además vale

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ H)(y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y) \tag{44}$$

Proposición 7 (Partición de la unidad) *Dado $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ compacto y sean $U_1, \ldots, U_k$ abiertos tales que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$.*

Entonces existen funciones $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que

1. *$0 \leq \theta_i \leq 1$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$ y $\sum_{i=1}^k \theta_i(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*
2. *$\operatorname{sop}(\theta_i)$ es compacto y $\operatorname{sop}(\theta_i) \subset U_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.*
3. *$\operatorname{sop}(\theta_0) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.*

Además, si $\Gamma = \partial\Omega$ con Ω acotado, entonces $\theta_0|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$. Esto NO quiere decir que el soporte de θ_0 esté contenido en Ω.

Podemos ahora enunciar y demostrar el teorema de extensión para dominios de clase C^1.

Teorema 8 *Sea Ω un dominio de clase C^1 con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ acotada. Entonces existe un operador de extensión*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{45}$$

lineal y continuo tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. *$Eu|_\Omega = u$*

2. $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$

3. $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

con C dependiendo sólo de Ω.

Demostración: Por hipótesis tenemos una colección finita de abiertos $U_0, U_1, \ldots, U_k$ y aplicaciones biyectivas y suaves H_i (cambios de coordenadas C^1) definidos en Q tales que

1. $H_i \in C^1(\overline{Q})$
2. $H_i^{-1} \in C^1(\overline{U})$
3. $H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega$
4. $H_i(Q_0) = U_i \cap \Gamma$

Podemos tomar una partición de la unidad C^∞ subordinada a esa colección. Notamos con $\{\theta_i\}_{i=0}^k$ a dicha partición. Entonces tenemos que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si definimos $u_i = \theta_i u$, vale que

$$u = \sum_{i=0}^{k} u_i \tag{46}$$

La idea ahora es extender cada u_i a todo el espacio.

Empezamos por u_0. Como $\mathrm{sop}(u_0) \subset\subset \Omega$, podemos aplicar el Lema 2 y considerar $\overline{u_0}$ como la extensión, pues $\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^k \nabla\theta_i$.

Para extender a cada u_i, $1 \leq i \leq k$, usamos los cambios de coordenadas para aplicar el Lema 3. Consideremos las funciones $\widetilde{u_i} : U_i \cap \Omega \to \mathbb{R}$ que resultan de restringir u a $U_i \cap \Omega$ (sin multiplicar por θ_i). Podemos trasladar entonces a Q. Definimos

$$v_i(y) = u(H_i(y)) \qquad \text{para } y \in Q_+ \tag{47}$$

Entonces, por la Proposición 6 $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$ y por el Lema 3 podemos extender a todo $W^{1,p}(Q)$. Notemos con v_i^* a dicha extensión. Podemos volver ahora a U_i con H^{-1}. Definimos

$$w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x)) \qquad \text{para } x \in U_i \tag{48}$$

Veamos que w_i es la extensión buscada de $\widetilde{u_i}$, pero sólo a U_i.

1. $w_i \in W^{1,p}(U_i)$ por la fórmula del cambio de variables.
2. $w_i = u_i$ para $x \in U_i \cap \Omega$. En efecto, si $x \in U_i \cap \Omega$, entonces $H_i^{-1}(x) \in Q_+$. Entonces

$$w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x)) = v_i(H_i^{-1}(x)) = u(H_i(H_i^{-1}(x))) = u(x) \tag{49}$$

3.

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C\|v_i^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq \|v_i\|_{W^{1,p}(Q_+)} \leq \|u_i\|_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)} \quad (50)$$

Finalmente, podemos poner

$$\widehat{u_i} = \begin{cases} \theta_i(x)w_i(x) & x \in U_i \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus U_i \end{cases} \quad (51)$$

Entonces $\widehat{u_i} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo i y $\|\widehat{u_i}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)}$. Además, $\widehat{(u_i)} = u_i$ en Ω, pues

$$x \notin U_i \quad \Rightarrow \quad \widehat{u_i}(x) = 0 = u_i(x) \quad (52)$$

$$x \in U_i \quad \Rightarrow \quad \widehat{u_i}(x) = \theta_i(x)w_i(x) = \theta_i(x)\widetilde{u_i}(x) = u_i(x) \quad (53)$$

La extensión de u es entonces

$$Eu = \overline{u_0} + \sum_{i=1}^{k} \widehat{u_i} \quad (54)$$

■

Algunas referencias y comentarios

1. Estas notas siguen la exposición de [Bre83]
2. Para una prueba del teorema de extensión en dominios Lipschitz, ver [EG92]. Esencialmente, se hace la prueba con la misma idea de "rectificar" el borde. La clave es que se desarrolla toda la teoría de diferenciación de funciones Lipschitz y se llega a una forma análoga del teorema de cambio de variables.
3. También hay una prueba para dominios Lipschitz en [Ste70]
4. En [AF03] se prueba para dominios aún más generales con la "propiedad uniforme del cono", que es más general que la propiedad de borde C^1 y Lipschitz.

Referencias

[AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, second ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[Bre83] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. Versión en español de Alianza Editorial, 1984.

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[Ste70] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.