Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones
Primer Cuatrimestre de 2010

Práctica 1

1. *Formulación variacional desde el punto de vista del Calculo Diferencial.* Sean X e Y espacios normados, y denotemos por $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio de formas lineales continuas de X en Y con la norma usual. Sea Ω un abierto de X, y $F:\Omega\to Y$. Decimos que F es derivable en un punto $a\in\Omega$ si existe $F'(a)\in\mathcal{L}(X,Y)$ tal que para todo $h\in X$ para el cual $a+h\in\Omega$ se tiene
$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h+\|h\|\varepsilon(h),$$
donde la aplicación $\varepsilon:X\to Y$ verifica $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

   Si F es derivable en cada punto de Ω, consideremos la aplicación derivada $F':\Omega\subset X\to\mathcal{L}(X,Y)$. Si esta aplicación es derivable en el punto $a\in\Omega$ entonces anotamos
$$F''(a):=(F')'(a)\in\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y)),$$
y la llamamos derivada segunda de F en a. Siendo que el espacio $L(X,\mathcal{L}(X,Y))$ puede identificarse con el espacio $\mathcal{L}_2(X,Y)$ de apliciones bilineales continuas de $X\times X\to Y$, podemos escribir
$$F''(a)(h,k):=(F''(a)h)k.$$
Se deduce (pero no es directo) la siguiente Fórmula de Taylor para funciones dos veces derivables: Si F es derivable en Ω (supuesto convexo, por ejemplo) y dos veces derivable en a, entonces
$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h+\frac{1}{2}F''(a)(h,h)+\|h\|^2\varepsilon(h),\qquad \text{con } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$
Si $Y=\mathbb{R}$, se tiene también la fórmula de Taylor-Maclaurin: Si $F\in\mathcal{C}^1(\Omega)$ y es dos veces derivable en el segmento $(a,a+h)$, entonces
$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h+\frac{1}{2}F''(a+th)(h,h),$$
para algún $t\in(0,1)$.

   (a) Deducir que
$$F'(a)h=\lim_{t\to 0}\frac{F(a+th)-F(a)}{t}.$$

(b) Sea $J : V \to \mathbb{R}$ con V espacio de Banach definida por

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v),$$

siendo $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $f : V \to \mathbb{R}$ formas bilineal y lineal, respectivamente, continuas. Calcular $J'(u)$ y $J''(u)$ para cada $u \in V$.

(c) Con la notación del item (a), sea $U \subset V$ un conjunto convexo, y considerar el problema:

$$\text{hallar } u \in U \qquad \text{tal que} \qquad J(u) = \inf_{v \in U} J(v). \tag{1}$$

Mostrar que si $u \in U$ es solución de (1) entonces

$$\forall v \in U \qquad J'(u)(v - u) \geq 0. \tag{2}$$

Sugerencia. Si $v = u + w$ notar que $0 \leq J(u + tw) - J(u)$ para $t \in [0, 1]$ y usar la definición de derivada primera.

(d) Con la notación del item anterior, suponer que a es V-elíptica, y mostrar que si $u \in U$ verifica (2), entonces u es la única solución de (1). Sugerencia. Usar la fórmula de Taylor-Maclaurin de orden 2.

(e) Analizar la condición (2) en los casos en que U es un cono convexo con vértice en 0 o un subespacio. Verificar que se llega a las mismas conclusiones que en la teórica.

2. Demostrar las siguientes desigualdades de Poincare unidimensionales:

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq C\|u'\|_0, \quad \text{para toda } u \in H^1(0,1) \text{con } u(0) = 0, \\ \|u\|_0 &\leq C\|u'\|_0, \quad \text{para toda } u \in H^1(0,1) \text{con } \int_0^1 u = 0. \end{aligned}$$

3. Proponer formulaciones variacionales para los siguientes problemas unidimensionales. Decidir si corresponden a problemas de minimización. Probar existencia y unicidad de la solución. En todos los casos $f \in L^2((0, 1))$.

(a) $-u'' + u = f$ en $(0, 1)$ con $u(0) = u(1) = 0$.

(b) $-u'' = f$ en $(0, 1)$ con $u(0) = u(1) = 0$.

(c) $-u'' = f$ en $(0, 1)$ con $u(0) = 0$ y $u'(1) = 0$.

(d) $-u'' = f$ en $(0, 1)$ con $u'(0) = u'(1) = 0$ y $\int_0^1 u = 0$.

(e) $-u'' + bu' + cu = f$ en $(0, 1)$ con $u(0) = u(1) = 0$. b y c son funciones suaves con $c - \frac{1}{2}b' \geq \gamma > 0$ en $(0, 1)$.

4. Sea $f(x) = |x|$ para $x \in [0, 1]$. Mostrar que $f \in W^{1,p}(0, 1)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Mostrar que la función de Heaviside no pertenece a ningún $W^{1,p}(0, 1)$.

5. Sea α un multiíndice arbitrario, y sea $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$. Mostrar que la derivada débil $D_w^\alpha f$ coincide con la derivada en el sentido usual.

6. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\int \phi = a \neq 0$. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos para cada $\varepsilon > 0$
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\, dy$$
   (a) Mostrar que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Si $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, calcular las derivadas débiles de orden $\leq k$ de f_ε ("derivando dentro de la integral").
   (c) Mostrar que si $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_\varepsilon \to f$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Concluir que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

7. Un dominio Ω es estrellado respecto a un punto $x \in \Omega$ si para cada $y \in \Omega$ el segmento $\overline{xy}$ está contenido en Ω. Mostrar que si Ω es estrellado respecto de un punto x, entonces $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. ¿Qué ocurre para $p = \infty$? *Sugerencia.* Suponer que $x = 0$ y mostrar que las dilataciones $u_\rho(y) = u(\rho y)$, $0 < \rho < 1$, definidas para $y \in \Omega$, verifican $u_\rho \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$ si $\rho \to 1$. Ahora para cada ρ, hallar una sucesión aproximante $u_{\rho,\varepsilon}$ regular tal que $u_{\rho,\varepsilon} \to u_\rho$ si $\varepsilon \to 0$.

8. Dado el intervalo (a, b), probar el siguiente caso particular de la desigualdad de Sobolev: existe C tal que para toda $u \in W^{1,1}(a, b)$ se tiene
$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq C\|u\|_{W^{1,1}(a,b)}.$$

9. Dado el intervalo (a, b), probar que las funciones en $W^{1,1}(a, b)$ son continuas (es decir, tienen un representante continuo).

10. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$. Mostrar que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisface $\int_\Omega f\phi\, dx = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto. *Ayuda.* Suponer que no y sea $\epsilon > 0$ tal que $A = \{x \in \Omega : f(x) > \epsilon\}$ (o lo mismo cambiando f por $-f$) tiene medida positiva. Aproximar A en medida por una unión finita $A_n = \bigcup B_j$ de bolas B_j, y denotar por $\widetilde{A}_n$ la unión de bolas $\widetilde{B}_j$ concéntricas con B_j y un poquito más chicas, que también aproxime en medida a A. Sean $\phi_n \in \mathcal{D}(A_n)$ tales que $0 \leq \phi_n \leq 1$ y $\phi_n \geq \frac{1}{2}$ en $\widetilde{A}_n$. Integrar $f\phi_n$ para llegar a una contradicción.

11. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$. Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces está bien definida su restricción a $\partial\Omega$, y que existe una constante C independiente de u tal que
$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}}.$$