Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones
Primer Cuatrimestre de 2010

Práctica 2

Denotamos por Q_k el espacio de polinomios (en las variables x e y) de grado a lo sumo k en cada variable, es decir, $Q_k = \langle \{x^r y^s : r, s \leq k\} \rangle$.

1. Sea $k \geq 0$ un entero y K un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, y sean ξ_i y η_j, $0 \leq i, j \leq k$, con $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_k = b$ y $c = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_k = d$. Mostrar que la terna $(K, Q_k, \mathcal{N})$ es un elemento finito, donde $\mathcal{N}$ denota el conjunto de evaluaciones en los nodos $(\xi_i, \eta_j), 0 \leq i, j \leq k$.

2. Suponer que $K = [a, b] \times [c, d]$, y $\mathcal{N}$ denota las cuatro evaluaciones en los puntos medios de los lados de K. ¿Es la terna $(K, Q_1, \mathcal{N})$ un elemento finito?

3. Mostrar que los elementos finitos introducidos en el ejercicio 1 son de clase $\mathcal{C}^0$. Esto es, si Ω es un dominio rectangular y $\mathcal{T} = \{K\}$ es una triangulación de Ω consistiendo de rectángulos K, entonces es posible ubicar los nodos en los elementos del tipo descripto en el ejercicio 1 asociados a cada rectángulo de manera que la interpolación global sea C^0.

4. Sea K un rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenados) de vértices $a_i, i = 1, \cdots, 4$, y sea $\mathcal{N}$ el conjunto de variables nodales determinadas por las siguientes evaluaciones:
$$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \ldots, 4 \right\}.$$
Mostrar que $(K, Q_3, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

5. Mostrar que el elemento del ejercicio 4 es de clase $\mathcal{C}^1$.

6. Sea $\Omega = [0, 1]^2$, y considerar una triangulación de Ω consistente de 4 cuadrados congruentes. Usando elementos finitos bilineales (Q_1) discretizar los siguientes problemas
$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$
y
$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$
Escribir el sistema lineal correpondiente en cada caso.