Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones
Primer Cuatrimestre de 2010

Práctica 3 (para entregar)

1. *Condición de ángulo mínimo.*

   (a) Sea K un triángulo que verifica una condición de regularidad con constante $\sigma > 1$. Mostrar que existe $\theta_0 = \theta_0(\sigma)$ tal que el mínimo ángulo de K es mayor o igual que θ_0. Observar que $\theta_0 \to 0$ si $\sigma \to \infty$.

   (b) Recíprocamente, si los ángulos de un triángulo K son mayores o iguales a θ_0 $(0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{3})$, entonces existe $\sigma(\theta_0)$ tal que K es regular con constante σ. Observar que $\sigma \to \infty$ si $\theta_0 \to 0$.

   Se deduce de lo anterior que, dada una triangulación $\mathcal{T}$(compuesta de triángulos) de un dominio poligonal Ω, una condición equivalente a la regularidad de K con constante σ, es la condición de ángulo mínimo: el mínimo ángulo de todo triángulo de $\mathcal{T}$ es mayor o igual a θ_0, donde θ_0 depende solo de σ.

2. (a) Sea $\widehat{K}$ el triángulo de vértices $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$. Dado $k \geq 1$, considerar el elemento finito de Lagrange de orden k, $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$, donde $\widehat{P} = \mathcal{P}_k(\widehat{K})$ y $\widehat{\Sigma}$ es el conjunto de evaluaciones en los puntos de coordenadas baricéntricas $(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}, \frac{l}{k})$ con $i + j + l = k$. Sea $I_{\widehat{K}}$ el operador de interpolación (de Lagrange) asociado con este elemento finito. Mostrar que si $v \in H^{k+1}(\widehat{K})$ es tal que $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$), entonces $\frac{\partial I_{\widehat{K}} v}{\partial x} \equiv 0$ (resp. $\frac{\partial I_{\widehat{K}} v}{\partial y} \equiv 0$).

   (b) Usar el item (a) para mostrar que existe un operador $\Phi : H^k(\widehat{K}) \to L^2(\widehat{K})$ tal que

   $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} I_{\widehat{K}} v &= \Phi \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \forall v \in H^{k+1}(\widehat{K}), \\ \Phi p &= p \qquad \forall p \in P_{k-1}(\widehat{K}). \end{aligned}$$

   (c) Aplicar resultados dados en la teórica al operador Φ para probar que existe una constante $\widehat{C} = \widehat{C}(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ tal que

   $$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - I_{\widehat{K}} v) \right\|_{L^2(\widehat{K})} \leq \widehat{C} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{H^k(\widehat{K})}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(\widehat{K}).$$

   (d) Sea $\widetilde{K}$ el triángulo de vértices $(0,0),(h_1,0),(0,h_2)$ y considerar en $\widetilde{K}$ el elemento finito de Lagrange de orden k (que es afín equivalente al definido en $\widehat{K}$). Notar que la aplicación afín $(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\hat{x}, \hat{y}) :=$

$(h_1\hat{x}, h_2\hat{y})$ aplica $\widehat{K}$ en $\widetilde{K}$. Usar esta aplicación para obtener, a partir del item anterior, la desigualdad

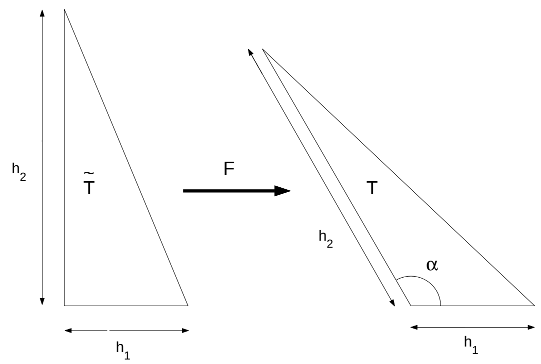
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}(v - I_{\widetilde{K}} v) \right\|_{L^2(\widetilde{K})} \leq \widehat{C} h^k \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{H^k(\widetilde{K})}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(\widetilde{K}).$$

donde $h = \max(h_1, h_2)$. La constante $\widehat{C}$ puede diferir de las anteriores, pero sigue dependiendo solo del elemento de referencia $\widehat{K}$. Una desigualdad análoga se obtiene para la derivada respecto de y.

(e) Sea ahora K un triángulo, con ángulo máximo α y con los lados adjacentes a este ángulo dados por $h_1\xi_1$ y $h_2\xi_2$, con ξ_1 y ξ_2 vectores unitarios. Consideramos en K el elemento de Lagrange de orden k que es afín equivalente al del item (d) (y también al del item (a)), y sea I_K el operador de Lagrange asociado. Escribir, como se muestra en la figura, una transformación afín, que aplique el triángulo $\widetilde{K}$ sobre K. Deducir, a partir del item anterior, que para $i = 1, 2$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi_i}(v - I_K v) \right\|_{L^2(K)} \leq \widehat{C} h^k \|v\|_{H^{k+1}(K)}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

donde $h = \max(h_1, h_2)$. La constante $\widehat{C}$ puede diferir de las anteriores, pero sigue dependiendo solo del elemento de referencia $\widehat{K}$.



(f) Si B es la matriz cuyas columnas son los vectores ξ_1 y ξ_2, notar que $\|B^{-1}\| \leq C\frac{1}{\sin\alpha}$ con C dependiendo solo de la norma matricial que se está considerando. Deducir entonces que

$$\|\nabla(v - I_K v)\|_{L^2(K)} \leq \frac{\widehat{C}}{\sin\alpha} h^k \|v\|_{H^{k+1}(K)}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(K).$$

(g) Sea $\mathcal{T}$ una triangulación (hecha de triángulos) de un dominio poligonal Ω que satisface una condición de ángulo máximo: el máximo ángulo de todo triángulo de $\mathcal{T}$ es menor o igual que α. Sea $u \in$

$H^{k+1}(\Omega)$, y suponer que $H^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega)$. Sea $I_{\mathcal{T}}$ el operador de Lagrange global de orden k. Demostrar que existe una constante C que depende solo de k y de α tal que

$$\|v - I_{\mathcal{T}}v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(\Omega).$$

donde $h = \max\{\operatorname{diam} K : K \in \mathcal{T}\}$. *Observación.* La acotación de $|v - I_{\mathcal{T}}v|_{H^1(\Omega)}$ sigue de los items anteriores. ¿Cómo se obtiene la acotación en norma $L^2(\Omega)$?

(h) Mostrar (puede ser con un ejemplo) que la restricción sobre las triangulaciones dada por condición de ángulo máximo es más débil que la dada por la condición de ángulo mínimo.