Métodos de Elementos Finitos y Aplicaciones
Primer Cuatrimestre de 2010

¿Ayuda? para la Práctica 3

item 2b). Las siguientes observaciones pueden ser útiles para este item.

1. Sea $\widehat{K}$ el triángulo de referencia de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$, y consideremos el operador de Lagrange de orden k ($k \geq 1$). Entonces se demuestra facilmente que si $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\widehat{K}})$ entonces

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} I_{\widehat{K}} v \right\|_{L^2(\widehat{K})} \leq \widehat{C} \|v\|_{L^\infty(\widehat{K})}$$

   Por el torema de inmersión se puede cambiar la norma L^∞ por la norma H^2, por ejemplo.

2. Si $v \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{K})$, se puede encontrar una función $w \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{K})$ tal que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = v \tag{1}$$

   y

$$\|w\|_{L^\infty(\widehat{K})} \leq \widehat{C} \|v\|_{H^1(\widehat{K})}. \tag{2}$$

   (Notar que $\mathcal{C}^\infty(\widehat{K}) \subset H^1(\widehat{K})$)

   Proof. Basta definir

$$w(x,y) = \int_0^x v(s,y)\, ds, \qquad (x,y) \in \widehat{K}.$$

   Claramente w verifica (1). Por otro lado

$$\begin{aligned} |w(x,y)| &\leq \int_0^x |v(s,y)|\, ds \\ &= \int_0^x \left| \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(s,t)\, dt + v(s,0) \right| ds \\ &\leq \int_0^x \int_0^y \left| \frac{\partial v}{\partial y}(s,t) \right| dt\, ds + \int_0^x |v(s,0)|\, ds \\ &\leq \iint_{\widehat{K}} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| dx\, dy + \int_{e_1} |v|\, ds \end{aligned}$$

   donde e_1 es la arista de $\widehat{K}$ que está sobre el eje x. Ahora, usando Cauchy-Schwarz tenemos

$$|w(x,y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2(\widehat{K})} + \|v\|_{L^2(e_1)}.$$

Ahora, usando la desigualdad de trazas

$$(\|v\|_{L^2(e_1)} \leq) \qquad \|v\|_{L^2(\partial\widehat{K})} \leq C\|v\|_{H^1(\widehat{K})}$$

llegamos a

$$|v(x,y| \leq \widehat{C}\|v\|_{H^1(\widehat{K})} \qquad (x,y) \in \widehat{K}$$

y se obtiene (2). $\square$

3. Usando el item *2a)* se puede definir un operador $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\overline{\widehat{K}}) \to L^2(\widehat{K})$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} I_{\widehat{K}} v &= \Phi \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\widehat{K}}), & (3) \\ \Phi p &= p \qquad \forall p \in P_{k-1}(\widehat{K}). & (4) \end{aligned}$$

Usando ahora los puntos anteriores se demuestra que Φ verifica

$$\|\Phi v\|_{L^2(\widehat{K})} \leq \widehat{C}\|v\|_{H^1(\widehat{K})}, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\widehat{K}}).$$

Como $\mathcal{C}^\infty(\overline{\widehat{K}})$ es denso en $H^1(\widehat{K})$, Φ se puede extender por continuidad a $H^1(\widehat{K})$. Obtenemos entonces un operador continuo $\Phi : H^1(\widehat{K}) \to L^2(\widehat{K})$ que verifica (3) y (4).

4. Sea $v \in H^{k+1}(\widehat{K})$, y sea $\{v_n\} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\widehat{K}})$ tal que $v_n \to v$ en $H^{k+1}(\widehat{K})$ (v es continua pues $k \geq 1$). Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial x} \to \frac{\partial v}{\partial x}, &\qquad \text{en } H^k(\widehat{K}) \\ I_{\widehat{K}} v_n \to I_{\widehat{K}} v, &\qquad \text{en } H^1(\widehat{K}). \end{aligned}$$

En realidad la convergencia de $I_{\widehat{K}} v_n$ es en cualquier norma, acá conviene H^1. Entonces

$$\frac{\partial I_{\widehat{K}} v}{\partial x} = \lim_n \frac{\partial I_{\widehat{K}} v_n}{\partial x} = \lim_n \Phi\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right) = \Phi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Así Φ verifica lo pedido en *2b)*.