El test del signo

En realidad el test del signo es un test binomial con p_o = ½ . Sin embargo, merece especial atención por su versatilidad, por tratarse del más antiguo test no paramétrico (1710) y porque, en base a él, es posible construir tests para tendencia y tests para correlación.

Supondremos que la distribución F de las observaciones es absolutamente continua y con única mediana, es decir que

$$F \in \Omega_o = \{F / F \text{ es absolutamente continua con } F(0) = 1/2\}$$

Comenzaremos considerando el problema de posición y luego el modelo de muestras apareadas.

Modelo de posición: Sean $X_1,...,X_n$ v.a. independientes con distribución $F(x-\theta)$, $F \in \Omega_o$, donde θ representa la mediana.

Consideremos tests para θ.

A. $H_o: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$

Si se desea testear $H_o: \theta = \theta_o$ vs $H_1: \theta \neq \theta_o$, lo reducimos al problema anterior trabajando con las v.a. $Y_i = X_i - \theta_o$.

Notemos que tanto la hipótesis nula como la alternativa son compuestas.

Sea

$$S = card\ \{i / X_i > 0\}$$

Definiendo

$$s(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 0 \\ 0 & \text{si } X_i \leq 0 \end{cases} \qquad \text{se puede escribir} \quad S = \sum_{i=1}^{n} s(X_i)$$

El test de nivel α para las hipótesis planteadas rechazará H_o para valores de *S* pequeños o grandes, es decir que la zona de rechazo será

***S* ≤ k ó S ≥ n-k** , con $k / P(Bi(n,1/2) \leq k) = \alpha/2$

Estamos usando que, bajo H_o, cualquiera sea $F \in \Omega_o$, $S \sim Bi(n,1/2)$.

Si n es grande, se trabaja con nivel asintótico α. En este caso

$$k = \frac{n}{2} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{4}}$$

o bien, se le resta ½ para hacer corrección por continuidad,

B. $H_o: \theta = 0$ vs $H_1: \theta < 0$

El test de nivel α para las hipótesis planteadas rechazará H_o si *S* es pequeño, es decir que la zona de rechazo será

$$\boldsymbol{S} \leq \mathbf{k}\ , \text{ con } k \,/\, P(Bi(n,1/2) \leq k) = \alpha$$

Si n es grande,

$$k = \frac{n}{2} - z_\alpha \sqrt{\frac{n}{4}} \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - z_\alpha \sqrt{\frac{n}{4}}$$

C. $H_o: \theta = 0$ vs $H_1: \theta > 0$

El test de nivel α para las hipótesis planteadas rechazará H_o si *S* es grande, es decir que la zona de rechazo será

$$\boldsymbol{S} \geq \mathbf{k}\ , \text{ con } k \,/\, P(Bi(n,1/2) \geq k) = \alpha$$

Si n es grande

$$k = \frac{n}{2} + z_\alpha \sqrt{\frac{n}{4}} \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + z_\alpha \sqrt{\frac{n}{4}}$$

Ejemplo: En los años 1950's, G. Matthews et al. llevaron a cabo experimentos sobre la navegación de pájaros. En estudios sobre palomas mensajeras, un grupo de éstas fue entrenada para volver a casa desde grandes distancias a lo largo de una línea de entrenamiento específica. Para determinar si las palomas podían encontrar el camino de regreso desde puntos no familiares, se realizó un experimento consistente en liberar a las palomas desde puntos situados a 90° y 180° de la línea de entrenamiento. Una medida de interés era el ángulo entre la línea de vuelo del ave cuando desaparecía en el horizonte y la línea de regreso a casa. Estos ángulos se midieron entre 0° y 180° de manera que las líneas por arriba o por debajo de la línea de regreso a casa no se distinguen. Sea θ la mediana del ángulo poblacional. Si los pájaros no vuelven a casa $\theta = 90°$. Una hipótesis de la investigación era que las aves usan el sol para navegar y que, de hecho $\theta < 90°$. Entonces, se desea construir un test para

$$H_o: \theta = 90° \qquad \text{vs} \qquad H_1: \theta < 90°$$

Cabe destacar que, como se consideran sólo aves que se liberaron en días de sol, si se rechaza H_o no se puede concluir que usan el sol para navegar. Sólo se puede concluir que vuelven a casa. Los ángulos observados al liberar a 28 palomas son los siguientes:

6	7	9	17	18	18	22	28	32	35	36	42	42	42
48	48	51	52	53	55	56	57	58	63	72	83	91	97

El valor observado de $S = card\,\{i / X_i - 90 > 0\}$= 2 y recordemos que rechazábamos H_o si $S \leq k$ con k tal que P(Bi(28,1/2) $\leq$ k) = α.

Si tomamos k = 9, se obtiene un nivel α = 0.0436. Claramente a este nivel rechazamos H_o.

p-valor = P(Bi(28,1/2) $\leq$ 2) < 0.0001.

Distribución del estadístico *S* bajo H_o: En el ejercicio 4 de la práctica 2 se demostrará que, bajo H_o, la distribución de *S* no depende de la distribución subyacente F, es decir que *S* es distribución libre.

Distribución del estadístico *S* bajo la alternativa (H_1): En el mismo ejercicio se demostrará que bajo H_1, *S* no es distribución libre. Si bien la distribución de *S* sigue siendo Bi(n,p), p depende de la distribución subyacente F.

Se puede demostrar que el test del signo es UMP para las hipótesis unilaterales e IUMP para la bilateral.

Consideremos como ejemplo el test **C**. La función de potencia en este caso está dada por

$$P_{\theta_1}(S \geq k) = P(Bi(n,p) \geq k) \qquad \text{con} \qquad p = P_{\theta_1}(X > 0) > 1/2$$

que es una función creciente de p. Si n es grande, bajo H_1 ($\theta_1 > 0$),

$$\frac{S - n(1 - F(-\theta_1))}{\sqrt{nF(-\theta_1)(1 - F(-\theta_1))}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

De manera que, para n grande, se puede aproximar la potencia. La aproximación del valor crítico es buena aún para muestras pequeñas ya que bajo H_o, p=1/2.

Antes de estudiar las propiedades asintóticas del test, veamos su aplicación al caso de muestras apareadas.

Comparaciones apareadas de dos tratamientos: Cuando se trata de comparar dos tratamientos o un tratamiento con un control, la efectividad de la comparación puede mejorarse, dividiendo los sujetos en subgrupos homogéneos y comparando los tratamientos dentro de cada subgrupo, disminuyendo de esta manera la variabilidad.

Supongamos, por ejemplo, tener n pares de sujetos (fijos) y que dentro de cada par un sujeto se elige al azar para recibir un tratamiento mientras que el otro sirve de control . Supondremos además que los pares son independientes.

Un test simple para la hipótesis de que existe efecto del tratamiento es el test del signo.

Datos: Sean $(X_1,Y_1),\ldots, (X_n,Y_n)$ observaciones independientes. Podemos pensar que X_i es el resultado correspondiente al control e Y_i el correspondiente al tratamiento. Sea

$$D_i = Y_i - X_i \qquad \forall \quad i = 1,\ldots,n$$

y $S = card\{\, i / D_i > 0\}$

Si no existe diferencia entre tratamiento y control, $P(D_i > 0) = P(D_i < 0) = 1/2$. (Notar que siempre se supone $P(D_i = 0) = 0$).

Consideremos los tres tipos de hipótesis:

A. H_o: $P(D_i > 0) = P(D_i < 0)$ vs H_1: $P(D_i > 0) \neq P(D_i < 0)$

Se rechaza Ho si

$$\boldsymbol{S \leq k \text{ ó } S \geq n-k}, \text{ con } k / P(Bi(n,1/2) \leq k) = \alpha/2$$

siendo $S = \{card\ i / D_i > 0\}$

B. H_o: $P(D_i > 0) \geq P(D_i < 0)$ vs H_1: $P(D_i > 0) < P(D_i < 0)$

Se rechaza Ho si

$$\boldsymbol{S \leq k}, \text{ con } k / P(Bi(n,1/2) \leq k) = \alpha$$

C. H_o: $P(D_i > 0) \leq P(D_i < 0)$ vs H_1: $P(D_i > 0) > P(D_i < 0)$

Se rechaza Ho si

$$\boldsymbol{S \geq k}, \text{ con } k / P(Bi(n,1/2) \geq k) = \alpha$$

<u>Notación</u>: El libro de Conover escribe las hipótesis en términos de P(+) y P(-).

Si en la práctica, en uno o más pares la diferencia es 0, se utiliza un estadístico modificado. Para ello se asigna scores o pesos 1, ½ ó 0 según la diferencia sea positiva, nula o negativa. Denotando

$n_+ = card\ \{i / D_i > 0\}$ $\qquad n_- = card\ \{i / D_i < 0\}$ $\qquad n_o = card\ \{i / D_i = 0\}$

entonces, $n = n_+ + n_- + n_o$. El estadístico del test será

$$S^* = n_+ + \frac{1}{2} n_0$$

Bajo H_o, S^* es equivalente a S, pues los individuos son fijos y, por lo tanto n_o lo es. La distribución de S es ahora Bi(n-n_o, ½). O sea que equivale a eliminar los empates. Este test será más conservativo que el original, en el sentido que la probabilidad de tipo I será menor que la especificada y se perderá potencia.

<u>¿Qué ocurre si las observaciones (X_i,Y_i) no corresponden a sujetos fijos sino que provienen de un proceso de aleatorización?</u>

Supongamos que n sujetos se eligen al azar en una población de pares y que en cada par uno de los sujetos se asigna al control y el otro al tratamiento en forma independiente y al azar. Sean

X_i: respuesta control del par i

Y_i: respuesta tratamiento del par i

$D_i = Y_i - X_i$

Si no hay efecto del tratamiento, D_i y $-D_i$ tienen la misma distribución. O sea si

$$F_i = F_{D_i}$$

$$F_i \text{ es simétrica bajo } \mathrm{H_o}$$

Si nos interesa la alternativa de que el tratamiento produce mayores respuestas que el control, D_i tenderá a tomar valores positivos. Este modelo corresponde a la hipótesis de aditividad según la cual el tratamiento agrega una cantidad Δ a la respuesta del sujeto control.

Si llamamos G_i a la distribución de D_i bajo H_o, entonces, $F_i(x) = G_i(x - \Delta)$.

Por lo tanto, si la población es grande,

- $D_1,..., D_n$ son v.a independientes con distribuciones $F_1,..., F_n$ respectivamente, con mediana Δ.

- $P(D_i = 0)=0$

y las hipótesis **A**, **B** y **C** se expresan

A. H_o: $\Delta = 0$ vs H_1: $\Delta \neq 0$

B. H_o: $\Delta \geq 0$ vs H_1: $\Delta < 0$

C. H_o: $\Delta \leq 0$ vs H_1: $\Delta > 0$

El test del signo puede aplicarse a esta situación pues $P(D_i > 0) = ½$ bajo H_o. Observemos que no necesitamos idéntica distribución.

Ejemplo: En un estudio, un investigador apareó 10 alumnos de escuela elemental con habilidades normales para el habla con 10 niños con defectos funcionales de articulación. El apareo se realizó en base a edad, sexo, grado y scores de tests para IQ (coeficiente intelectual). A todos los alumnos se les aplicó el mismo test de discriminación auditiva. Altos scores en este test están asociados con pobre discriminación auditiva. La hipótesis del investigador era que hay mayor discriminación auditiva en los niños normales que en los niños con defectos funcionales de articulación. Sean (X_i, Y_i) las observaciones correspondientes al par i y $D_i = Y_i - X_i$ la diferencia entre los scores del niño con defecto funcional auditivo y el niño normal. La siguiente tabla presenta los resultados obtenidos

Par	X_i	Y_i	$D_i=Y_i - X_i$
1	28	33	5
2	6	46	40
3	30	41	11
4	10	7	-3
5	37	22	-15
6	27	43	16
7	9	21	12
8	9	45	36
9	15	14	-1
10	8	6	-2

Las hipótesis a testear son

H_o: $\theta = 0$ vs H_1: $\theta > 0$

siendo θ la mediana de la distribución de las diferencias. El estadístico del test

$$S = card\,\{i / D_i > 0\}$$

que, bajo H_o tiene distribución Bi(10, ½). La región de rechazo corresponde a valores grandes de S. Supongamos que se desea trabajar con nivel 0.05. Si consideramos como región de rechazo $\{S \geq 9\}$, el nivel del test es α = 0.011 y si consideramos la región $\{S \geq 8\}$, el nivel del test es α = 0.055.

Trabajando con la primer región de rechazo se trata de un test conservativo con respecto a la probabilidad deseada 0.05.

Dado que el valor observado de S = 6, no se rechaza H_o. Aunque aparentemente los datos son coherentes con la hipótesis del investigador, ésta no pudo ser probada y ésto puede deberse a la poca potencia del test del signo en este caso. Más adelante estudiaremos el test de Wilcoxon que es una mejor alternativa al test t para este problema.

Observación: Si se hubiese rechazado H_o, no podría concluirse que los scores medianos difieren en ambos grupos. El test del signo testeó la hipótesis de que la mediana de la diferencia es 0 y no que la diferencia de las medianas es 0. En nuestro ejemplo, observemos que

$$\widetilde{X} = \frac{1}{2}(22+33) = 27.5 \qquad \widetilde{Y} = \frac{1}{2}(10+15) = 12.5 \qquad \widetilde{D} = \frac{1}{2}(8+11) = 9.5$$

Consistencia y eficiencia asintótica del test del signo: Sean $X_1,..., X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuídas con distribución F(x-θ), con F $\in \Omega_o$. Supongamos que se desea testear:

H_o: $\theta = 0$ vs H_1: $\theta > 0$

Sea

$$\overline{S} = \frac{S}{n}$$

Por la ley de los grandes números $\bar{S} \xrightarrow{p} E(s(X_i)) = P(X_i > 0) = \mu(F,\theta)$. En el ejercicio 4 de la práctica 2, mostrarán que

$$\mu(F,\theta) = \begin{cases} 1/2 & \forall F \in \Omega_o, \theta = 0 \\ > 1/2 & \forall F \in \Omega_o, \theta > 0 \end{cases}$$

y por lo tanto el test del signo es **consistente**, siendo la clase de consistencia la clase de todas las distribuciones continuas con única mediana positiva.

En el mismo ejercicio 4 de la práctica 2 se calculará la eficacia del test del signo y la del test t y se demostrará que la **eficiencia asintótica relativa** del test de signo respecto al test de t es 0.637 bajo normalidad. En general

$$ARE(s,t) = 4[f(0)]^2 \sigma_f^2$$

siendo $\sigma_f^2 = \int x^2 f(x)dx$, y por lo tanto se obtienen los siguientes resultados

Normal	Uniforme	Doble exponencial
0.637	0.333	2.0

Para obtener la eficacia del test del signo se deberán verificar las condiciones 1 a 5 de la página 15. Supondremos que F tiene densidad continua en 0, f(0)>0.

1. *S* provee un test consistente.
2. Existen sucesiones $\{\mu_n(\theta)\}$ y $\{\sigma_n(\theta)\}$ tales que

$$\frac{S - \mu_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

uniformemente en un entorno de $\theta = 0$.

Se considera $\mu_n(\theta) = n\, p(\theta)$ y $[\sigma_n(\theta)]^2 = n\, p(\theta)\,(1- p(\theta))$, siendo $p(\theta) = P_\theta(X>0)=1-F(-\theta)$. Para obtener convergencia uniforme en un entorno de 0, necesitaremos una cota que provee el siguiente teorema:

Teorema de Berry-Esseen (Chung, 1968): Sean $X_1,...,X_n$ v.a. iid con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$ y $E(|X_i - \mu|^3) = \rho^3$, $0 < \rho^3 < \infty$. Entonces, para todo n

$$\left| P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \le t \right) - \Phi(t) \right| \le \frac{d\rho^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

donde d es una constante independiente de n.

3. Existe $\frac{d}{d\theta}\mu_n(\theta)|_{\theta=0} = \mu_n'(0)$.

4. Si $\{\theta_n\}$ es una sucesión tal que $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$\frac{\sigma_n(\theta)}{\sigma_n(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad\qquad \frac{\mu_n'(\theta)}{\mu_n'(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Para verificar las dos condiciones anteriores se usa que $p(\theta)$ es derivable y continua en 0.

5. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n'(0)}{\sqrt{n}\sigma_n(0)} = c > 0$$

Se obtiene la eficacia del test del signo $c_s = 2\, f(0)$. Para el test de t $c_t = 1/\sigma_f$, y se deduce el valor de la eficiencia dado antes.

Intervalo de confianza y estimador puntual deducidos de un test: Veremos en general cómo obtener estimadores de un parámetro e intervalos de confianza a partir de un test y lo aplicaremos al caso del test del signo.

Introduciremos la idea con el test de t. Sea $X_1,..., X_n$ una m.a de la distribución $N(\theta,\sigma^2)$ y consideremos el estadístico del test

$$t(\theta) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\theta}{s} = -\sqrt{n}\,\frac{\theta}{s} + \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}}{s}$$

como función lineal de θ. Observemos la ***Figura 1.2 (pag.13)*** de Hettmansperger. Sobre las abscisas de un par de ejes cartesianos se grafica el espacio paramétrico y sobre las ordenadas el espacio muestral de valores del estadístico. Se dibuja la distribución del estadístico bajo H_o: $\theta = 0$ y se marcan los valores críticos para el test bilateral de nivel α .

El test se aplica observando donde la recta $t(\theta)$ corta al eje vertical, o sea la posición del punto $t(0)$. Recordemos que el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ se obtiene invirtiendo la región de aceptación del test, lo cual corresponde a los puntos $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ sobre el eje horizontal. Claramente $P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) = P_\theta\left(|t(\theta)| \le t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$.

Es fácil verificar que los límites del intervalo son los obtenidos por el método usual.

El principio usado para determinar el estimador puntual correspondiente a $t(\theta)$ es seleccionar el valor de θ que corresponde al punto de simetría de la distribución nula de $t(0)$. Para tests razonables generalmente coincide con la moda de la distribución nula. En este caso, $\hat{\theta} = \overline{X}$.

Resumiendo, toda la inferencia estadística: tests y estimación puede ser unificada a través de un gráfico de este tipo.

En el caso del test del signo, $S(\theta)=\text{card}\{i \,/\, X_i > \theta\}$, que también podemos escribir en base a la muestra ordenada, o sea

$$S(\theta)=\text{card}\{i \,/\, X^{(i)} > \theta\}$$

En la ***Figura 1.3 (pag.14)*** de Hettmansperger está graficada la función $S(\theta)$ vs θ para n par (En el ejercicio 6 de la práctica 2 lo harán para n impar) y la distribución nula de $S(0)$ que es Bi(n,1/2).

Se observa que $S(\theta)$ es una función escalera no creciente, con saltos en cada estadístico de orden. Además es continua a la derecha. Se puede verificar que

$$X^{(k+1)} \leq \theta < X^{(n-k)} \Leftrightarrow k+1 \leq S(\theta) \leq n-k-1$$

En efecto,

$$X^{(k+1)} \leq \theta \Leftrightarrow S(\theta) \leq n-(k+1)$$
$$\theta < X^{(n-k)} \Leftrightarrow S(\theta) \geq k+1$$

Luego, un intervalo de nivel 1 - α para θ será

$$[X^{(k+1)}, X^{(n-k)})$$

con k tal que $P(Bi(n,1/2) \leq k)=\alpha/2$. En general se usa el intervalo cerrado, que bajo la hipótesis de continuidad de la distribución subyacente sigue teniendo el mismo nivel.

Como n es par, el punto de simetría de la distribución nula es n/2, entonces para obtener el estimador puntual buscamos el valor de $\hat{\theta}$ tal que $S(\hat{\theta})=n/2$. Como cualquier valor entre $X^{(n/2)}$ y $X^{(n/2+1)}$ lo satisface, se toma como convención el valor central de ese intervalo, es decir $\hat{\theta} = \dfrac{X^{(n/2)} + X^{(n/2+1)}}{2}$

que es la mediana muestral. Por lo tanto la mediana muestral es el estimador puntual derivado del test del signo.

Estimador de Hodges-Lehmann: Estos autores introdujeron una discusión general sobre el problema de la estimación.

<u>Definición</u>: Sea $X_1,..., X_n$ una m.a. de $F(x-\theta)$, con $F \in \Omega_o$. Sea V un estadístico para testear H_o: $\theta = 0$ y definamos $V(\theta)$ reemplazando X_i por $X_i - \theta$, i=1,...,n. Supongamos que $V(\theta)$ es una función no creciente de θ y que la distribución nula de $V=V(0)$ es simétrica alrededor de μ_o. Definamos

$$\theta^* = \sup\{\theta / V(\theta) > \mu_o\}$$
$$\theta^{**} = \inf\{\theta / V(\theta) < \mu_o\}$$
$$\hat{\theta} = \frac{\theta^* + \theta^{**}}{2}$$

El estimador $\hat{\theta}$ se denomina estimador de Hodges-Lehmann de θ. Puede pensarse como un estimador de máxima probabilidad relativo a la distribución del estadístico del test pues corresponde a los puntos modales de la distribución.

Si además, se definen

$$\hat{\theta}_L = \inf\{\theta \,/\, V(\theta) < C_1\}$$
$$\hat{\theta}_U = \sup\{\theta \,/\, V(\theta) > C_2\}$$

donde C_1 y C_2 satisfacen $P(V \geq C_1) = P(V \leq C_2) = \alpha/2$, entonces el intervalo

$$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$$

es un intervalo de nivel 1 - α para θ basado en V.

Teorema: $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ son equivariantes por traslaciones, o sea, por ejemplo

$$\hat{\theta}(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) + a$$

Demostración: Hettmansperger, pag. 16.

Esta propiedad nos permite, al estudiar las propiedades asintóticas de los estimadores, trabajar con $\theta = 0$ sin pérdida de generalidad.

Se puede demostrar que el estimador de Hodges-Lehmann tiene distribución asintótica normal.

Teorema: (sin demostración) Sea $\hat{\theta}_n$ el estimador de Hodges-Lehmann correspondiente al estadístico V_n que cumple las condiciones 1 a 5 de Pitman (pag. 15), con eficacia c. Entonces

$$P(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) < a) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(a\, c)$$

o sea

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{c^2}\right)$$

Por lo tanto la eficiencia asintótica relativa de dos estimadores de Hodges-Lehmann es la eficiencia asintótica relativa de los tests asociados.

Estabilidad: La robustez de un método estadístico puede verse como una descripción de la estabilidad del procedimiento. Uno querría evitar procedimientos que se viesen influenciados por una pequeña fracción de los datos. El test t y el estimador $\overline{X}$ son ejemplos de procedimientos que tienen alta potencia y eficiencia bajo un modelo (Normal) pero que son altamente inestables. Sólo una observación puede alterar los valores del estadístico t y de $\overline{X}$ tanto como se quiera. El test de signo y la mediana son, por otro lado, ejemplos de procedimientos estables.

Definición: dado un estimador $\hat{\theta}$ de θ , supongamos que existe un entero *a* tal que

a) $X^{(a+1)} \leq \hat{\theta} \leq X^{(n-a)}$

b) Fijados valores $x^{(a+2)},....,x^{(n)}$, si $x^{(a+1)} \to -\infty$, $\hat{\theta} \to -\infty$.

c) Fijados valores $x^{(1)},....,x^{(n-a-1)}$, si $x^{(n-a)} \to \infty$, $\hat{\theta} \to \infty$.

Si a^* es el menor entero que satisface esas condiciones, entonces $\hat{\theta}$ puede tolerar a lo sumo a^* observaciones malas.

Se define la **tolerancia** como $\tau_n = a^*/n$.

El concepto de tolerancia está asociado con el concepto de punto de ruptura de un estimador. Si existe el límite de τ_n cuando n tiende a infinito, esa tolerancia asintótica es el punto de ruptura.

Ejemplo: La media muestral $\overline{X}$ tiene tolerancia cero porque $X^{(1)} \leq \overline{X} \leq X^{(n)}$ de manera que *a**+1=1 y por lo tanto *a** = 0. Respecto a la mediana , si n=2r, la tolerancia es (r-1)/2r y si n=2r+1, la tolerancia es r/(2r+1). Por lo tanto la tolerancia asintótica es ½.

Definición: Sea V_n un estadístico que da origen a un test Φ_n para las hipótesis

$$H_o: \theta = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \theta > 0$$

Supongamos que existe un entero *a* tal que, fijados valores $x_{a+2},...x_n$, es posible elegir valores de $x_1,...,x_{a+1}$ de manera que V < k. Sea *a** el menor de esos enteros, se define la **tolerancia de aceptación** como

$$\tau_n(\text{aceptación}) = a^* / n$$

Como V no puede ser forzado a aceptar si cambiamos menos de *a** observaciones, se dice que puede tolerar a lo sumo *a** observaciones malas.

Del mismo modo, se define la **tolerancia de rechazo** como el menor entero *b** tal que, fijados $x_{b+2},...x_n$, se pueden elegir $x_1,...,x_{b+1}$, de modo que $V \geq k$. Por lo tanto

$$\tau_n(\text{rechazo}) = b^* / n$$

Ejemplo: Consideremos el caso del test de t para testear

$$H_o: \mu = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \mu > 0$$

La zona de rechazo del test está definida por los valores del estadístico $\overline{X}$ tales que

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}}{s} > t_{n-1,\alpha}$$

En este caso

τ_n(aceptación) = 0 (Se probará en la práctica)

τ_n(rechazo) = $\dfrac{t^2_{n-1,\alpha}}{n + t^2_{n-1,\alpha}} - \dfrac{1}{n}$

Este último resultado fue probado por Ylvisacker (1977): *Test resistance*. JASA, **72**, 551-556.

Definición: Sea $\hat{\theta}_n$ un estimador de θ basado en $X_1,\ldots,X_n$, la curva de sensibilidad de $\hat{\theta}_n$ es

$$SC(x) = (n+1)\,(\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n)$$

siendo $\hat{\theta}_{n+1}$ el estimador basado en $X_1,\ldots,X_n,x$.

El límite de la curva de sensibilidad es la curva de influencia (Hampel, 1974). Para definir la curva de influencia es necesario representar el estimador como un funcional evaluado en la distribución empírica. Por ejemplo, la media de una distribución continua F, puede escribirse como

$$T(F) = \int x\, f(x)dx = \int x\, dF(x)$$

y $\overline{X} = T(F_n) = \sum X_i / n$.

Definición: Si el estimador $\hat{\theta}_n$ puede expresarse a partir de un funcional T tal que $T(F_n) = \hat{\theta}_n$, la curva de influencia es

$$IC(x) = \frac{d}{dt} T\left[(1-t)F + t\delta_x\right] \Big|_{t=0}$$