Algunas aplicaciones del test del signo

Test de Mc Nemar para significación de cambios: En realidad este test se estudiará en detalle en Métodos no Paramétricos II, en el contexto de las denominadas Tablas de Contingencia. De cualquier manera, lo describiremos por tratarse de una aplicación del test del signo.

Supongamos que observamos pares de datos nominales con dos categorías que llamaremos "1" y "0". Es decir que observamos pares (X_i, Y_i) en los que tanto X_i como Y_i toman valores 1 y 0.Nos interesa detectar diferencias entre la probabilidad de (0,1) y la de (1,0).

Ejemplo: Un investigador deseaba estudiar posibles cambios en la actitud de la audiencia frente a la posición expuesta por un conferencista. Para ello seleccionó una muestra de 78 estudiantes universitarios que asistieron a una conferencia y registró su acuerdo (1) o desacuerdo (0), inmediatamente después de la conferencia (X_i) y un mes después (Y_i). Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

Tiempo 1	**Tiempo 2**		
	Desacuerdo	**Acuerdo**	**Total**
Desacuerdo	24	18	42
Acuerdo	6	30	36
Total	30	48	78

El investigador desea determinar si la proporción de personas que está de acuerdo con la posición del conferencista es diferente un mes después de la conferencia que inmediatamente después de ésta. O equivalentemente si hubo cambios en la actitud de la audiencia.

Datos: Los datos consisten en n observaciones de v.a. bivariados (X_i, Y_i), donde cada X_i e Y_i toma sólo valores 1 y 0. En el test de Mc Nemar los datos se suelen resumir en una tabla como la anterior, es decir, en general

X_i	**Y_i**		
	$Y_i = 0$	**$Y_i = 1$**	**Total**
$X_i = 0$	a	b	a+b
$X_i = 1$	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	n

es decir que, por ejemplo a = número de pares con $X_i = 0$ e $Y_i = 0$.

Suposiciones:

1) los pares (X_i, Y_i) son independientes.
2) la escala de medición de X_i e Y_i es nominal con dos categorías (0 y 1).
3) la diferencia $P(X_i=0,Y_i=1) - P(X_i=1,Y_i=0)$ es negativa para todo i, positiva para todo i o cero para todo i. Se puede pedir idéntica distribución, pero no es necesario.

Estadístico del test y distribución nula: El estadístico del test es

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

Si b + c $\leq$ 20, es preferible usar $T_2 = b$.

Justificación: Al evento (0,1) lo designamos "+" y al evento (1,0) lo designamos "-". Los eventos (0,0) y (1,1) son empates. Podemos pensar este problema como una aplicación del test del signo, donde las hipótesis a testear son

H_o: P(+)=1/2 vs H_1: P(+) $\neq$ ½

El estadístico del test será el cardinal de "+" en la muestra, es decir $T_2 = b$.

Bajo Ho, T_2 ~ Bi(b+c,1/2). Si b+c > 20 (sugerido por Conover), podemos usar la aproximación Normal, en cuyo caso el estadístico es

$$U = \frac{b-(b+c)/2}{\sqrt{(b+c)/4}} = \frac{(b-c)/2}{\sqrt{b+c}\,/2} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}}$$

que, bajo Ho, tiene distribución asintótica N(0,1). Conover considera el estadístico $T_1 = U^2$, que bajo H_0, tiene distribución χ^2_1. Si deseamos testear hipótesis unilaterales debemos usar necesariamente U.

Hipótesis a testear:

A. H_o: $P(X_i=0,Y_i=1) = P(X_i=1,Y_i=0)$ vs H_1: $P(X_i=0,Y_i=1) \neq P(X_i=1,Y_i=0)$

o, equivalentemente, alguna de las dos formas siguientes

H_o: $P(X_i=0) = P(Y_i=0)$ vs H_1: $P(X_i=0) \neq P(Y_i=0)$

H_o: $P(X_i=1) = P(Y_i=1)$ vs H_1: $P(X_i=1) \neq P(Y_i=1)$

B. H_o: $P(X_i=0,Y_i=1) = P(X_i=1,Y_i=0)$ vs H_1: $P(X_i=0,Y_i=1) > P(X_i=1,Y_i=0)$

C. H_o: $P(X_i=0,Y_i=1) = P(X_i=1,Y_i=0)$ vs H_1: $P(X_i=0,Y_i=1) < P(X_i=1,Y_i=0)$

Zona de rechazo:

A. Se rechaza H_o a nivel α si $\mathbf{T_2 \geq b+c-k}$ **ó** $\mathbf{T_2 \leq k}$, con k tal que P(Bi(b+c,1/2) $\leq$k) = $\alpha/2$. Si b+c es grande, se rechaza H_o si $|U| \geq z_{\alpha/2}$ o bien si $T_1 \geq \chi^2_{1,\alpha}$.

B. Se rechaza H_o a nivel α si $\mathbf{T_2 \geq k}$, con k tal que P(Bi(b+c,1/2) $\geq$ k) = α. Si b+c es grande, se rechaza H_o si $T_1 \geq z_\alpha$.

C. Se rechaza H_o a nivel α si $\mathbf{T_2 \leq k}$, con k tal que P(Bi(b+c,1/2) $\leq$ k) = α. Si b+c es grande, se rechaza H_o si $T_1 \leq -z_\alpha$.

Ejemplo: En el ejemplo presentado al comienzo, las hipótesis a testear son:

H_o: $P(X_i=0,Y_i=1) = P(X_i=1,Y_i=0)$ vs H_1: $P(X_i=0,Y_i=1) \neq P(X_i=1,Y_i=0)$

y b+c = 24. Un test exacto de nivel α rechaza H_o si $b \leq k$ ó $\geq b+c-k$ con k tal que $P(Bi(24,1/2) \leq k)=\alpha/2$.

$P(Bi(24,1/2) \leq 6) = 0.011$, $P(Bi(24,1/2) \leq 7) = 0.032$. Trabajamos con nivel 0.022 y a este nivel, como b = 18, se rechaza H_o.

Usando la aproximación normal, el estadístico $T_1 = (b-c)^2/(b+c) = 6$, y como $\chi^2_{1,0.05} = 3.84$, se rechaza H_o.

Test de Cox-Stuart para tendencias: Así como el test del signo permite, usando la distribución binomial, testear la hipótesis de idéntica distribución versus diferencias en la posición, es posible crear otras variables binomiales para testear la hipótesis de aleatoriedad versus alternativas de tendencia. Este test es una alternativa al test paramétrico para H_o: $\beta = 0$ en el modelo de regresión lineal $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$. La hipótesis nula en este test implica que la pendiente de la recta es 0 .

El test de Cox-Stuart se basa en v.a. binomiales y permite testear la presencia de tendencias. Mientras que el test paramétrico clásico testea ausencia de tendencia vs presencia de una tendencia lineal (relación lineal entre X e Y), el test de Cox-Stuart no tiene esa restricción y testea la hipótesis de ausencia de tendencia vs la hipótesis alternativa de tendencia *monótona*.

Una tendencia es monótona si la variable dependiente crece cuando crece la variable independiente (monótona creciente) o decrece cuando crece la variable independiente (monótona decreciente).

Datos: Sea $X_1,..., X_n$ una sucesión de v.a. ordenadas según algún criterio (por ejemplo, índice = tiempo). Si los X_i están aleatoriamente distribuidos sobre la sucesión, entonces

$P(X_i - X_j < 0) = P(X_i - X_j > 0) = 1/2$ para todo $i \neq j$.

En cambio, si X_i crece monótonamente, $P(X_i - X_j < 0) > P(X_i - X_j > 0)$ si $i < j$ y si X_i decrece monótonamente, $P(X_i - X_j < 0) < P(X_i - X_j > 0)$ si $i < j$.

El test de Cox-Stuart examina la relación de (X_i , X_j) para porciones de la sucesión. En particular, si *n* es par o sea $n = 2N$, se convierte la sucesión en *N* pares (X_i , X_{i+N}). Si la sucesión es aleatoria

$P(X_{i+N} - X_i < 0) = P(X_{i+N} - X_i > 0) = 1/2$ para todo i.

Se definen $D_i = X_{i+N} - X_i$ y

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{i+N} - X_i > 0 \\ 0 & \text{si } X_{i+N} - X_i < 0 \end{cases}$$

$Z_i \sim Bi(1,p_i)$ con $p_i = P(X_{i+N}-X_i > 0)$ y se desea testear H_o: $p_i = ½$ para todo i.

Suposiciones: 1) Los pares (X_i, X_{i+N}) son mutuamente independientes.

2) $sg[P(X_{i+N} - X_i > 0) - P(X_{i+N} - X_i < 0)]$ es el mismo para todo i.

3) Cada par (X_i, X_{i+N}) puede ser clasificado como +, - o empate.

Nota: Las diferencias iguales a cero (empates) se eliminan y se trabaja con *N'*: número de diferencias no nulas. En lo que sigue, por simplicidad, supondremos que no hay empates. Si los hay, *N* debe reemplazarse por *N'*.

Estadístico del test y distribución nula: *S* = número de diferencias positivas, es decir

$$S = \sum_{i=1}^{N} Z_i = card\ \{i \,/\, X_{i+N} - X_i > 0\}$$

Bajo H_o, es decir si no hay tendencia, *S* ~ Bi(*N*,1/2). Valores grandes de *S* sugieren una tendencia creciente mientras que valores bajos sugieren una tendencia decreciente.

Notas: 1) Si *n* es impar, *n*=2*N*+1, se elimina la observación central X_{N+1} y se forman las diferencias $D_i = X_{i+N+1} - X_i$. El estadístico del test será

$$S = \sum_{i=1}^{N} Z_i = card\ \{i \,/\, X_{i+N+1} - X_i > 0\}$$

2) No se aparea X_{i+1} con X_i porque estas diferencias se ven más afectadas por las fluctuaciones transitorias de la secuencia.

Hipótesis a testear:

A. H_o: $P(X_{i+N} - X_i > 0) = P(X_{i+N} - X_i < 0)$ vs H_1: $P(X_{i+N} - X_i > 0) \neq P(X_{i+N} - X_i < 0)$

o equivalentemente

H_o: $p_i = 1/2$ vs H_1: $p_i \neq ½$

[No existe tendencia vs hay tendencia creciente o decreciente]

B. H_o: $P(X_{i+N} - X_i > 0) \leq P(X_{i+N} - X_i < 0)$ vs H_1: $P(X_{i+N} - X_i > 0) > P(X_{i+N} - X_i < 0)$

o equivalentemente

H_o: $p_i \leq 1/2$ vs H_1: $p_i > ½$

[No existe tendencia creciente vs hay tendencia creciente]

C. H_o: $P(X_{i+N} - X_i > 0) \geq P(X_{i+N} - X_i < 0)$ vs H_1: $P(X_{i+N} - X_i > 0) < P(X_{i+N} - X_i < 0)$

o equivalentemente

H_o: $p_i \geq 1/2$ vs H_1: $p_i < ½$

[No existe tendencia decreciente vs hay tendencia decreciente].

Zona de rechazo:

A. Rechazamos Ho a nivel α si $S \geq$ N-k ó $S \leq$ k, con k tal que P(Bi(N,1/2) $\leq$ k) = $\alpha/2$.

B. Rechazamos Ho a nivel α si $S \geq$ k con k tal que P(Bi(N,1/2) $\leq$ k) = 1 - α.

C. Rechazamos Ho a nivel α si $S \leq$ k con k tal que P(Bi(N,1/2) $\leq$ k) = α.

El test de Cox-Stuart resulta insesgado y consistente para las hipótesis planteadas en términos de p_i. La eficiencia asintótica del test bajo normalidad respecto del test paramétrico basado en el coeficiente de regresión es 0.78. Esta eficiencia sube a 0.83 si se elimina el tercio central de las observaciones y se aparea el primer tercio con el último tercio.

Hay una modificación del test de Cox-Stuart para testear cambios en la dispersión (Rao, 1968).

Ejemplos: 1) El coordinador de una encuesta de hogares ha notado que el porcentaje de rechazos en las entrevistas parece variar con el tiempo. Desea determinar si lo que él ha observado se debe al azar o si en realidad se debe a la presencia de un factor sistemático. La siguiente tabla presenta los porcentajes de rechazos durante un periodo de 18 días de entrevistas. Se incluyen además las diferencias $D_i = X_{i+N} - X_i$ y los valores de Z_i.

Día	**Rechazo**	**Día**	**Rechazo**	**D_i**	**Z_i**
1	7.4	10	6.2	-1.2	0
2	5.2	11	5.0	-0.2	0
3	6.6	12	5.1	-1.5	0
4	7.9	13	4.9	-3.0	0
5	7.8	14	4.2	-3.6	0
6	7.2	15	7.7	0.5	1
7	6.8	16	5.4	-1.4	0
8	6.7	17	5.3	-1.4	0
9	6.5	18	5.1	-1.4	0
					***S* = 1**

Las hipótesis a testear son

A. H_o: $P(X_{i+N} - X_i < 0) = P(X_{i+N} - X_i > 0)$ vs H_1: $P(X_{i+N} - X_i < 0) \neq P(X_{i+N} - X_i > 0)$

o equivalentemente

$$H_o: p_i = 1/2 \qquad \text{vs} \qquad H_1: p_i \neq ½$$

y rechazamos Ho a nivel α si $S \geq$ 9-k ó $S \leq$ k, con k tal que P(Bi(9,1/2) $\leq$ k) = $\alpha/2$. Si consideramos k = 1, se obtiene un test de nivel 0.0390.

A este nivel se rechaza H_0 pues el valor observado de S es 1.

2) Se registra el caudal promedio mensual de un río (en pies cúbicos por segundo) en un punto determinado durante un periodo de 24 meses. Dado que los caudales suelen presentar un ciclo anual, es conveniente aparear los mismos meses en años consecutivos y no diferentes meses dentro de un mismo año. Las hipótesis a testear son

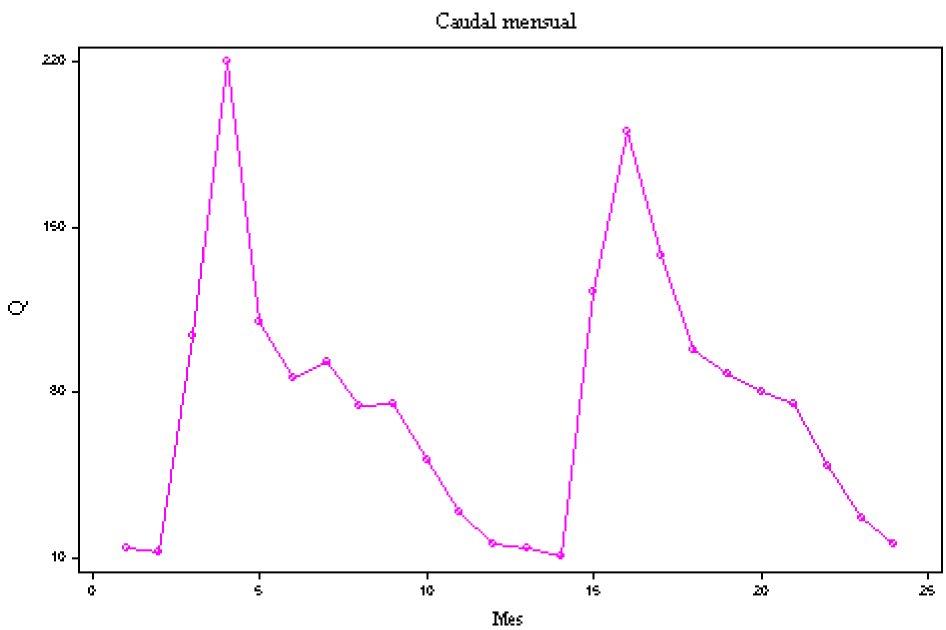
H_o: $P(X_{i+N} - X_i > 0) \geq P(X_{i+N} - X_i < 0)$ vs H_1: $P(X_{i+N} - X_i > 0) < P(X_{i+N} - X_i < 0)$

o equivalentemente

H_o: $p_i \geq 1/2$ vs H_1: $p_i < ½$

Es decir que la hipótesis de los investigadores es que los caudales presentan una tendencia decreciente. En la tabla siguiente se presentan los datos, las diferencias $D_i = X_{i+12} - X_i$ y los valores de Z_i.

Mes	**Año 1**	**Año 2**	**D_i**	**Z_i**
enero	14.6	14.2	-0.4	0
febrero	12.2	10.5	-1.7	0
marzo	104.0	123.0	19.0	1
abril	220.0	190.0	-30.0	0
mayo	110.0	138.0	28.0	1
junio	86.0	98.1	12.1	1
julio	92.8	88.1	-14.0	0
agosto	74.4	80.0	5.6	1
septiembre	75.4	75.6	0.2	1
octubre	51.7	48.8	-2.9	0
noviembre	29.3	27.1	-1.8	0
diciembre	16.0	15.7	-0.3	0
				***S* = 5**



Rechazamos Ho a nivel α si $S \leq$ k con k tal que P(Bi(12,1/2) $\leq$ k) = α. Si tomamos k=2, P(Bi(12,1/2) $\leq$ 2) = 0.0193 y si k=3, P(Bi(12,1/2) $\leq$ 3) = 0.073, entonces trabajamos con nivel 0.0193 y no se rechaza H_o.

p-valor = P(Bi(12,1/2) $\leq$ 5) = 0.3872.

Otras aplicaciones del test del signo: En primer lugar veremos cómo usar el test del signo para testear **correlación**, o sea para detectar si valores altos de una variable tienden a aparearse con valores altos de la otra y valores bajos con valores bajos (correlación positiva) o si valores altos de una variable tienden a aparearse con valores bajos y viceversa (correlación negativa).

Para ello se ordenan los pares de datos en orden creciente de una de las variables, la que presenta menos empates. Si hay correlación, la otra variable debería presentar una tendencia: creciente en el caso de correlación positiva y decreciente en caso de correlación negativa. Es decir que se aplica el test de Cox-Stuart a la variable sobre la que no se efectuó el ordenamiento.

<u>Ejemplo</u>: Cochran (1937) compara las reacciones de varios pacientes a dos drogas, para ver si existe correlación positiva entre las dos reacciones del paciente. En la siguiente tabla se presentan los datos originales:

Paciente	Droga 1	Droga 2	Paciente	Droga 1	Droga 2
1	+0.7	+1.9	6	+3.4	+4.4
2	-1.6	+0.8	7	+3.7	+5.5
3	-0.2	+1.1	8	+0.8	+1.6
4	-1.2	+0.1	9	0.0	+4.6
5	-0.1	-0.1	10	+2.0	+3.4

A continuación, ordenamos los datos según la reacción a la droga 1:

Paciente	Droga 1	Droga 2
2	-1.6	+0.8
4	-1.2	+0.1
3	-0.2	+1.1
5	-0.1	-0.1
9	0.0	+4.6
1	+0.7	+1.9
8	+0.8	+1.6
10	+2.0	+3.4
6	+3.4	+4.4
7	+3.7	+5.5

y aplicamos el test de Cox-Stuart a la variable correspondiente a la Droga 2.

Se forman los pares (+0.8,+1.9), (+0.1,+1.6), (+1.1,+3.4), (-0.1,+4.4), (+4.6,+5.5)

Las hipótesis a testear son

H_o: no hay correlación positiva vs H_1: hay correlación positiva

que equivalen a testear, para la Droga 2, las hipótesis

H_o: no hay tendencia creciente vs H_1: hay tendencia creciente

El estadístico del test es S = card {i / $D_i > 0$}, que, bajo H_0 tiene distribución Bi(5,1/2) y se rechaza la hipótesis nula para valores grandes de S.

Si k = 5, P(Bi(5,1/2) $\geq$ 5) = 0.0312 y si k = 4, P(Bi(5,1/2) $\geq$ 4) = 0.1875. Entonces, a nivel 0.0312, como S_{obs} = 5, se rechaza H_0, es decir que hay evidencia de que existe una correlación positiva entre las reacciones a las dos drogas. El p-valor es 0.0312.

Nota: Las propiedades del test para correlación no han sido estudiadas. Una de las dificultades en su aplicación es que si hay muchos empates hay más de una manera de ordenar las observaciones para aplicar el test de tendencia. En ese caso se recomienda usar un enfoque conservativo, es decir usar aquel ordenamiento que rechaza H_0 con menos probabilidad.

En el siguiente ejemplo veremos cómo usar el test de Cox-Stuart para **testear la presencia de un comportamiento** dado.

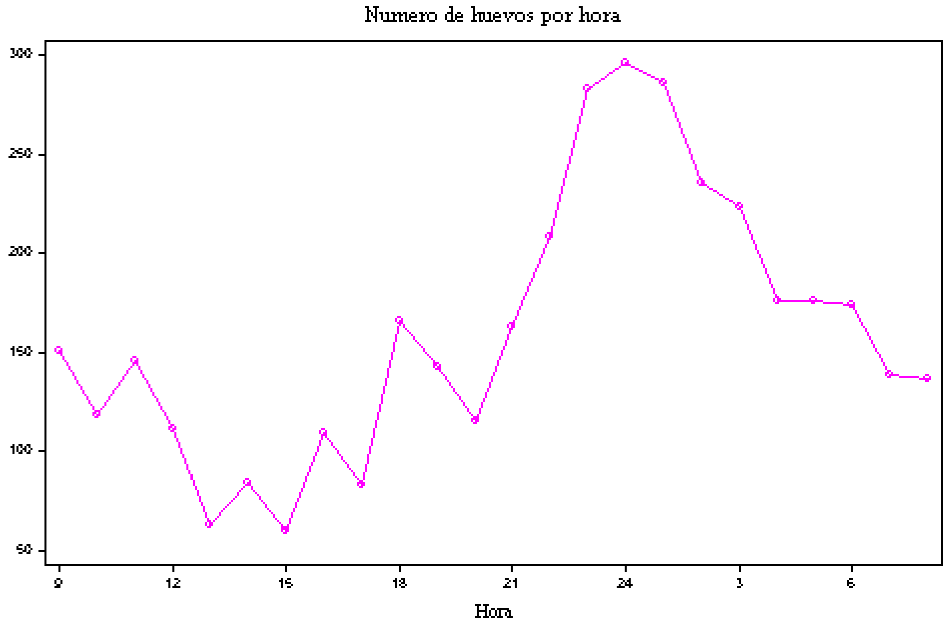
Ejemplo: En un laboratorio se registra el número de huevos que pone un grupo de insectos por hora, durante un periodo de 24 horas, a fin de testear las hipótesis

H_o: los números de huevos por hora son observaciones independientes e idénticamente distribuidas

H_1: los números de huevos por hora tienden a tener un valor mínimo a las 2:15 pm, se incrementan hasta alcanzar un máximo a las 2:15 am y vuelven a decrecer hasta las 2:15 pm.

A continuación se presentan los datos obtenidos:

Hora	**Número de huevos**	**Hora**	**Número de huevos**	**Hora**	**Número de huevos**
9 am	151	5 pm	83	1 am	286
10 am	119	6 pm	166	2 am	235
11 am	146	7 pm	143	3 am	223
mediodía	111	8 pm	116	4 am	176
1 pm	63	9 pm	163	5 am	176
2 pm	84	10 pm	208	6 am	174
3 pm	60	11 pm	283	7 am	139
4 pm	109	medianoche	296	8 am	137



Si la alternativa es cierta, los conteos cerca de las 2:15 pm deberían ser los menores y los cercanos a las 2:15 am los mayores. Reordenemos las observaciones de acuerdo a los tiempos, empezando por los tiempos más cercanos a las 2:15 pm hasta los próximos a las 2:15 am.

Hora	Número de huevos	Hora	Número de huevos
2 pm	84	8 am	137
3 pm	60	9 pm	163
1 pm	63	7 am	139
4 pm	109	10 pm	208
mediodía	111	6 am	174
5 pm	83	11 pm	283
11 am	146	5 am	176
6 pm	166	medianoche	296
10 am	119	4 am	176
7 pm	143	1 am	286
9 am	151	3 am	223
8 pm	116	2 am	235

Si H_1 es cierta estos datos deberían tener una tendencia creciente. Aplicamos el test de Cox-Stuart para tendencia. En este caso, N=12, $S = \text{card}\{i \,/\, X_{i+N}-X_i > 0\}$.

A nivel 0.0193, rechazamos H_o si $S \geq 10$ y como $S_{obs} = 12$, rechazamos H_o.

p-valor = $P(Bi(12,1/2) \geq 12) = 0.0002$