

Práctica 3

Ejercicio 1: Halle la distribución bajo H_0 del estadístico T^+ del test de rangos signados de Wilcoxon para $n = 5$.

Ejercicio 2: Suponiendo que el estadístico del test t es calculado sobre los rangos signados R_i en lugar de sobre las diferencias D_i , muestre que este estadístico es función de

$$T = \frac{T_o}{\left(\sum R_i^2\right)^{1/2}} = \frac{\sum R_i \operatorname{sg}(D_i)}{\left(\sum R_i^2\right)^{1/2}}$$

donde sg es la función signo, según la siguiente fórmula

$$t_R = \frac{T}{\left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} T^2\right)^{1/2}}$$

Ejercicio 3: Una muestra aleatoria de 20 personas que manejan fue seleccionada para ver si el alcohol afectaba el tiempo de reacción. Cada tiempo de reacción fue medido en el laboratorio antes y después de beber determinada cantidad de alcohol. Los tiempos de reacción en segundos son los siguientes.

Sujeto	Antes	Después	Sujeto	Antes	Después
1	0.68	0.73	11	0.65	0.72
2	0.64	0.62	12	0.59	0.60
3	0.68	0.66	13	0.78	0.78
4	0.82	0.92	14	0.67	0.66
5	0.58	0.68	15	0.65	0.68
6	0.80	0.87	16	0.76	0.77
7	0.72	0.77	17	0.61	0.72
8	0.65	0.70	18	0.86	0.86
9	0.84	0.88	19	0.74	0.72
10	0.73	0.79	20	0.88	0.97

¿Hay evidencias de que el alcohol afecta el tiempo de reacción?

Ejercicio 4: Con el propósito de saber si la mediana del número de ítems vendidos en cada operación de venta es igual a 10, un vendedor registró los números de ítems vendidos en 12 ventas independientes. Testee, usando el test de Wilcoxon, las siguientes hipótesis

$$H_0: \theta = 10 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \neq 10$$

Venta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
No. ítems	22	9	4	5	1	16	15	26	47	8	31	7

Ejercicio 5: Un candidato a un cargo político considera que aumentará el caudal de votos a su favor si adopta la posición mediana de los ciudadanos. Para ello diseñó un cuestionario y lo distribuyó entre 15 votantes (muestra aleatoria), asignando scores de 0 a 10 a los resultados obtenidos.

Votante	Score	Votante	Score
1	6.7	9	7.4
2	4.2	10	9.3
3	4.1	11	8.8
4	2.3	12	5.4
5	6.1	13	6.1
6	9.3	14	6.0
7	8.9	15	4.9
8	7.4		

Halle un intervalo de confianza para el score mediano. En base a los procedimientos usados en esta práctica, ¿cuál es la estimación puntual de la mediana?.

Ejercicio 6: Resuelva el ejercicio 3 usando scores normales en vez de rangos y compare los resultados obtenidos por ambos métodos.

Ejercicio 7: En un ejemplo visto en clase como aplicación del test de Cox-Stuart, se registraba el caudal de un río (en pies cúbicos por segundo) durante 24 meses:

Mes	Año 1	Año 2	D_i
enero	14.6	14.2	-0.4
febrero	12.2	10.5	-1.7
marzo	104.0	123.0	19.0
abril	220.0	190.0	-30.0
mayo	110.0	138.0	28.0
junio	86.0	98.1	12.1
julio	92.8	88.1	-14.0
agosto	74.4	80.0	5.6
septiembre	75.4	75.6	0.2
octubre	51.7	48.8	-2.9
noviembre	29.3	27.1	-1.8
diciembre	16.0	15.7	-0.3

Testee la hipótesis de que existe una tendencia positiva en los caudales, con scores normales y con rangos signados.

Ejercicio 8: En un ejemplo visto en clase como aplicación del test de Cox-Stuart, se comparaban las reacciones de varios pacientes con cada una de dos drogas para ver si existía correlación positiva entre las dos reacciones. En la siguiente tabla se presentan los resultados ordenados según la reacción a la Droga 1. Testee a nivel 5% la hipótesis de que existe correlación positiva usando métodos basados en el test de Wilcoxon.

Paciente	Droga 1	Droga 2
2	-1.6	0.8
4	-1.2	0.1
3	-0.2	1.1
5	-0.1	-0.1
9	0	4.6
1	0.7	1.9
8	0.8	1.6
10	2.0	3.4
6	3.4	4.4
7	3.7	5.5

Ejercicio 9: ¿Para qué ejercicios de la práctica 2 se puede aplicar el test de Wilcoxon? Realice el test y compare los resultados obtenidos?.

Ejercicio 10 (*): Suponga que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias i.i.d, $F \in \Omega_s$ (distribuciones simétricas con única mediana en 0).

a) Usando que $g(X_1, \dots, X_n)$ y $g(-X_1, \dots, -X_n)$ tienen la misma distribución, muestre que si

$$g(X_1, \dots, X_n) + g(-X_1, \dots, -X_n) = \mu_0,$$

entonces $g(X_1, \dots, X_n)$ está simétricamente distribuída alrededor de $\mu_0 / 2$,

Hint: Muestre que $P(g(X_1, \dots, X_n) \leq (\mu_0 / 2) - t) = P(g(X_1, \dots, X_n) \geq (\mu_0 / 2) + t)$.

b) Aplique a) al estadístico del test de rangos signados de Wilcoxon para demostrar que T^+ tiene distribución simétrica bajo la hipótesis nula. ¿Cuál es el punto de simetría?.

Ejercicio 11 (*): En este ejercicio se consideran condiciones sobre las distribuciones marginales de un par de v.a. posiblemente dependientes (T,C), de manera que la diferencia $T - C$ esté simétricamente distribuída.

a) Pruebe que si las distribuciones marginales son idénticas (pero no necesariamente simétricas), entonces $T - C$ está simétricamente distribuída.

b) Pruebe que si las distribuciones marginales son simétricas (pero podrían tener diferentes parámetros de escala), la distribución de $T - C$ es simétrica.

Ejercicio 12 (*): Muestre que la función generadora de scores normales

$$\psi(u) = \Phi_+^{-1}(u), \text{ siendo } \Phi_+(x) = 2\Phi(x) - 1,$$

satisface las siguientes condiciones:

$\psi(u)$ es no negativa y no decreciente para $0 < u < 1$.

$$\int_0^1 \psi(u) du < \infty \quad \text{y} \quad 0 < \int_0^1 \psi^2(u) du < \infty$$

mostrando que

$$\int_0^1 \psi(u) du = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \psi^2(u) du = 1$$

Ejercicio 13 (*): Calcule la media y la varianza exactas y asintóticas, bajo la hipótesis nula, del estadístico de signos modificados, y discuta su distribución asintótica.

Ejercicio 14: Cierta estudio muestra que drogas para la hipertensión arterial, tales como el propanolol, podrían aliviar los síntomas de pánico escénico (Time Magazine, jul 1982, pag. 58). Para testear esta hipótesis, profesionales y estudiantes dieron 2 recitales como solistas ante una audiencia de críticos y miembros de la Universidad. 90 minutos antes de cada recital se les suministró propanolol o un placebo. El pulso cardíaco se les midió mediante un monitoreo electrocardiográfico remoto durante la representación. El pulso normal en reposo es de 70 pulsaciones por minuto. Los datos correspondientes a 8 ejecutantes son los siguientes:

Ejecutante	Droga	Placebo
1	85	126
2	107	140
3	69	95
4	122	148
5	106	142
6	121	172
7	137	133
8	87	143

Sea θ la mediana de la distribución de las diferencias: Placebo - Droga. Use el procedimiento de rangos signados de Wilcoxon para testear las hipótesis:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > 0$$

a nivel $\alpha = 0.05$. Obtenga un estimador puntual de θ y construya un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para θ .