TRASFORMAZIONE DI DARBOUX

LEZIONE PER IL CORSO
FISICA TEORICA : ONDE NON LINEARI E SOLITONI

AA 2008--2009 PROF. A. DEGASPERIS

Trasformazione di Darboux dell'eq. di Schrödinger (2009)

$$\psi^{(0)}_{xx} = [u^{(0)}(x) - k^2]\psi^{(0)} \quad , \quad \psi_{xx} = [u(x) - k^2]\psi$$

trasf. di Darboux : $\psi^{(0)}(x,k) \longrightarrow \psi(x,k) = A(x,k)\psi^{(0)}(x,k) +$
$+ B(x,k)\psi^{(0)}_x(x,k)$

Hp : i) le funzioni $A(x,k)$ e $B(x,k)$ non dipendono dalla particolare soluzione $\psi^{(0)}(x,k)$

ii) $A(x,k)$ e $B(x,k)$ sono polinomi della variabile k^2

Inserendo l'espressione di ψ nell'eq. di Schrödinger si trova

$$[A_{xx} + A(u^{(0)} - u) + Bu^{(0)}_x + 2B_x u^{(0)} - 2k^2 B_x]\psi^{(0)} +$$
$$+ [2A_x + B_{xx} + B(u^{(0)} - u)]\psi^{(0)}_x = 0$$

che implica il sistema

$$\begin{cases} A_{xx} + A(u^{(0)} - u) + Bu^{(0)}_x + 2B_x u^{(0)} - 2k^2 B_x = 0 \\ 2A_x + B_{xx} + B(u^{(0)} - u) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo solo il caso più semplice in cui A e B non dipendono da k^2. In questo caso si ottiene

$B = 1 \quad , \quad u = u^{(0)} + 2A_x \quad , \quad A_{xx} - 2AA_x + u^{(0)}_x = 0$

integrando una volta la 3ª eq. si ottiene l'eq. di Riccati

$$A_x - A^2 + u^{(0)} = -p^2 \quad , \quad p = \text{cost.} \ (p > 0)$$

linearizzazione : $A = -\varphi_x/\varphi$

$$\varphi_{xx} = (p^2 + u^{(0)})\varphi$$

che coincide con l'eq. di Schrödinger per $\psi^{(0)}$ per $k = ip$

Il metodo consiste quindi nel:

i) assegnare $u^{(0)}(x)$ in modo che la corrispondente soluzione $\psi^{(0)}(x,k)$ dell'eq. di Schrödinger sia nota

ii) fissare il parametro positivo p e calcolare la corrispondente soluzione $\varphi(x)$ dell'eq. di Schrödinger
$$\varphi_{xx} = (p^2 + u^{(0)}(x))\varphi$$

iii) calcolare il nuovo potenziale $u(x)$ con la trasformazione (trasformazione di Bäcklund)
$$u(x) = u^{(0)}(x) - 2\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_x$$

iv) calcolare la soluzione della eq. di Schrödinger $\psi_{xx} = [u(x) - k^2]\psi$ per ogni k con la trasformazione di Darboux
$$\psi(x,k) = \psi_x^{(0)}(x,k) - \frac{\varphi_x(x)}{\varphi(x)}\psi^{(0)}(x,k)$$

Avvertenza: il valore di p e la soluzione $\varphi(x)$ vanno scelti in modo che $\varphi(x)$ non abbia zeri per $x \in \mathbb{R}$ per evitare che $u(x)$ sia singolare.

Trasformazione di Darboux sulla trasformata spettrale:
Per semplicità assumiamo che la trasformata spettrale di $u^{(0)}(x)$ abbia solo la componente di spettro continuo $S[u^{(0)}(x)] = \{R^{(0)}(k)\}$. Assumiamo inoltre che $\varphi(x)$ abbia l'andamento asintotico generico
$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} a_- e^{-px} + b_- e^{px}, \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a_+ e^{-px} + b_+ e^{px}$$

quindi
$$\frac{\varphi_x(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm p$$

Sia $\psi_L^{(0)}(x,k)$ la soluzione tale che $\psi_L^{(0)}(x,k) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{-ikx}$

quindi $\psi_L^{(0)}(x,k) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{T^{(0)}(k)} e^{-ikx} + \dfrac{R^{(0)}(k)}{T^{(0)}(k)} e^{ikx}$

e analogamente $\psi_L(x,k) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{-ikx}$

$$\psi_L(x,k) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{T(k)} e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T(k)} e^{ikx}$$

allora la trasformazione di Darboux con la normalizzazione appropriata alla soluzione $\psi_L(x,k)$ diventa

$$\psi_L(x,k) = \left(\frac{i}{k+ip}\right)\left[\psi^{(0)}_{Lx}(x,k) - \frac{\varphi_x(x)}{\varphi(x)}\,\psi_L^{(0)}(x,k)\right]$$

da cui, inserendo l'andamento asintotico per $x\to+\infty$, si ha

$$T(k) = \left(\frac{k+ip}{k-ip}\right) T^{(0)}(k), \quad R(k) = -\left(\frac{k+ip}{k-ip}\right) R^{(0)}(k)$$

Questa trasformazione di Darboux ha due conseguenze:

1) crea un solitone; infatti, se $u^{(0)}$ non ha solitoni (ovvero spettro discreto), $u(x)$ ha uno ~~spettro~~ autovalore discreto (ovvero il polo di $T(k)$ in $k=ip$) e quindi un solitone

2) se $u^{(0)}(x,t)$ soddisfa la KdV $u_t^{(0)} + u^{(0)}_{xxx} - 6u^{(0)}u^{(0)}_x = 0$ allora $R^{(0)}(k,t) = R^{(0)}(k,0)\, e^{-(2ik)^3 t}$ e quindi $R(k,t) = R(k,0)\, e^{-(2ik)^3 t}$. Conclusione: anche $u(x,t)$ soddisfa la KdV, $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$, e la trasformazione di Darboux commuta con la evoluzione nel tempo data dalla KdV:

$$\begin{tikzcd}
u^{(0)}(x,0) \arrow[r, "\text{KdV}"] \arrow[d, "\text{Darboux}"] & u^{(0)}(x,t) \arrow[d, "\text{Darboux}"] \\
u(x,0) \arrow[r, "\text{KdV}"] & u(x,t)
\end{tikzcd}$$

FINE