Caracterización de wavelets ortonormales en $\mathbb{R}$

Resumen

Dada una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definimos $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$ con $j, k \in \mathbb{Z}$. Decimos que una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una wavelet ortonormal si el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ resulta una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Vamos a dar condiciones que caracterizan a las wavelets ortonormales en $\mathbb{R}$. En la primera sección estudiamos el caso particular en que la función ψ estudiada es una función de banda limitada y en la segunda damos una prueba del caso general.

1. Caracterización de Wavelets ortonormales de banda limitada

Definición 1.1 *Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es de banda limitada si $sop(\hat{\psi}) \subseteq I$ con I un intervalo acotado.*

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema:

Teorema 1.2 *Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de banda limitada tal que ψ es nula en un entorno del origen es una wavelet ortonormal si y sólo si se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$(ON1) \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$

$$(ON2) \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + k))\overline{\hat{\psi}(\xi + k)} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\, \forall j \geq 1$$

$$(C1) \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$(C2) \qquad \sum_{j\geq 0} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + q))} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\, \forall q \in 2\mathbb{Z} + 1$$

Las ecuaciones $(ON1)$ y $(ON2)$ caracterizan la ortonormalidad del sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ (y como ya veremos no alcanzan para caracterizar la completitud) y las ecuaciones $(C1)$ y $(C2)$ caracterizan la completitud. Vamos a ver durante la demostración que la para la necesidad de las condiciones $(C1)$ y $(C2)$ alcanza con la continuidad de $|\hat{\psi}|$ en el origen, pero para la suficiencia usaremos que la función $\hat{\psi}$ es nula en casi todo punto en un entorno del origen. Esto se debe al tipo de demostración dada. En la segunda sección vamos a remover esta condición. Empezamos viendo que las condiciones $(ON1)$ y $(ON2)$ caracterizan la ortonormalidad del sistema $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ y para esto no vamos a usar la condición de banda limitada.

1.1. Ortonormalidad

Lema 1.3 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. El sistema $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal si sólo si vale $(ON1)$.*

Demostración: Si $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$es ortonormal entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{0k} &= < \psi_{0,0}, \psi_{0,k} > = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\overline{\psi_{0,k}(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\psi}_{0,k}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}e^{2\pi i\xi k}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 e^{2\pi i\xi k}d\xi = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 e^{2\pi i\xi k}d\xi \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{\psi}(t+\ell)|^2 e^{2\pi itk}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+\ell)|^2 e^{2\pi itk}dt
\end{aligned}$$

la función 1-periódica $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+\ell)|^2$ tiene los coeficientes de Fourier k-ésimos como δ_{0k}, entonces $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+\ell)|^2 = 1$ *a.e.* $t \in \mathbb{R}$. La misma cuenta muestra que si

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+\ell)|^2 = 1 \; a.e. \; t \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\begin{aligned}
< \psi_{0,k}, \psi_{0,j} > &= < \psi_{0,k-j}, \psi_{0,0} > = \int_0^1 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t+\ell)|^2 e^{2\pi it(k-j)}dt \\
&= \int_0^1 e^{2\pi it(k-j)}dt = \delta_{k,j}
\end{aligned}$$

lo que da la ortonormalidad del sistema $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ■

Hasta ahora tenemos que la ecuación $(ON1)$ caracteriza la ortonormalidad del sistema al nivel de dilatación 0. Veamos qué pasa a nivel j:

Sea $j \in \mathbb{Z}$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned}
< \psi_{j,k}, \psi_{j,\ell} > &= \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)\overline{\psi_{j,\ell}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k)2^{\frac{j}{2}}\overline{\psi(2^jx-\ell)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(\mu-k)\overline{\psi(\mu-\ell)}d\mu = < \psi_{0,k}, \psi_{0,\ell} >
\end{aligned}$$

donde hicimos el cambio de variables $\mu = 2^j x$. Por lo tanto, para cada $j \in \mathbb{Z}$ fijo, el sistema $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal si y sólo si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+k)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$

Ahora podemos ver qué pasa si comparamos dos dilataciones arbitrarias:
Calculamos ahora $< \psi_{j,k}, \psi_{n,m} >$. Podemos suponer que $j > n$.

$$\begin{aligned} < \psi_{j,k}, \psi_{n,m} > &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) 2^{\frac{n}{2}} \overline{\psi(2^n x - m)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^{j-n}(y+m) - k) 2^{\frac{n}{2}} \overline{\psi(y)} 2^{-n} dy \end{aligned}$$

donde hicimos el cambio de variables $x = 2^{-n}(y+m)$

$$\begin{aligned} < \psi_{j,k}, \psi_{n,m} > &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j-n}{2}} \psi(2^{j-n} y - (k - 2^{j-n} m)) \overline{\psi(y)} dy \\ &= < \psi_{l,p}, \psi_{0,0} > \end{aligned}$$

con $\ell = n - j$ y $p = k - 2^{j-n} m$. Entonces resulta que para $j > n$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $\psi_{j,k}$ es ortogonal a $\psi_{n,m}$ si y sólo si $\psi_{\ell,p}$ es ortogonal a ψ. Por lo tanto el sistema es ortonormal si y sólo si

$$< \psi_{j,k}, \psi >= \delta_{\ell,0}.\delta_{p,0} \qquad j \geq 1$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 =< \psi, \psi_{j,k} > &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) 2^{\frac{j}{2}} \overline{\psi(2^j x - k)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) 2^{\frac{j}{2}} e^{2\pi i \frac{\xi}{2^j} k} . \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} 2^{-j} d\xi \qquad (1) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(2^j \mu) e^{2\pi i \mu k} . \overline{\hat{\psi}(\mu)} d\mu \end{aligned}$$

donde hicimos $\mu = 2^{-j}\xi$ en la ecuación (1). Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} \hat{\psi}(2^j \mu) e^{2\pi i \mu k} . \overline{\hat{\psi}(\mu)} d\mu \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j (t+\ell) . \overline{\hat{\psi}(t+\ell)} \right) e^{2\pi i \mu k} dt \qquad \forall j \geq 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

cambiamos el orden de la suma y la integral y obtenemos, igual que antes, que los coeficientes de Fourier son todos cero y entonces

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j (t+\ell) . \overline{\hat{\psi}(t+\ell)} = 0 \qquad a.e\, t \in \mathbb{R}, j \geq 1$$

Tenemos entonces el

Teorema 1.4 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. El sistema $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal si y sólo si se cumplen*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+k)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi+k))\overline{\hat{\psi}(\xi+k)} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\, \forall j \geq 1$$

Vamos a estudiar ahora las proyecciones ortogonales en $L^2(\mathbb{R})$ sobre los espacios

$$W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$$

Sea Q_j el proyector ortogonal. Entonces

$$Q_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}$$

Vamos a usar que $\hat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} e^{-2\pi i\xi k 2^{-j}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi)$ para todo $j,k \in \mathbb{Z}$. Además, por Plancherel tenemos que $\hat{\psi}_{j,k}$ es base ortonormal de $\hat{W}_j$. Entonces

$$\widehat{Q_j f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} > \hat{\psi}_{j,k}$$

Sean $g_j(\mu) = \hat{f}(\mu)\overline{\hat{\psi}_{j,k}(2^{-j}\mu)}$ y

$$F_j(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} g_j(\xi + 2^j\ell)$$

Resulta que F_j es 2^j-periódica. Entonces, como las funciones $E_k^j(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}}.e^{-2\pi i\xi k 2^j}$ son 2^j-periódicas y son b.o.n. de $L^2([0,2^j))$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
< \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} >_{L^2([0,2^j))} &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}_{j,k}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)2^{-\frac{j}{2}}.\overline{e^{-2\pi i\xi k 2^{-j}}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)}d\xi \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{2^j\ell}^{2^j(\ell+1)} \hat{f}(\xi)2^{-\frac{j}{2}}.e^{2\pi i\xi k 2^{-j}}\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)}d\xi \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^{2^j} \hat{f}(\mu+2^j\ell)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\mu+2^j\ell)E_k^j(\mu)}d\mu \\
&= \int_0^{2^j} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} g_j(\mu+2^j\ell)\right)\overline{E_k^j(\mu)}d\mu \qquad (3)\\
&= < F_j, E_k^j >_{L^2([0,2^j))}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+2^j\ell)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi+2^j\ell)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k} > E_k^j(\xi)$$

Tenemos entonces el siguiente

Teorema 1.5 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces:*

1. $f \perp W_j$ si y sólo si
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+2^jk)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi+k)} = 0 \qquad a.e.\, \xi\in\mathbb{R} \quad j\in\mathbb{Z}$$

2. Si Q_j es el proyector ortogonal sobre W_j entonces
$$\widehat{Q_jf}(\xi) = \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+2^jk)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi+k)} \tag{4}$$

Demostración: La parte 1 es inmediata. Para la parte 2 hay que usar que $\hat{\psi}_{j,k} = \hat{\psi}(2^{-j}\xi)E_k^j(\xi)$ ■

1.2. Completitud

Para estudiar la completitud del sistema $\{\psi_{j,k} : j,k\in\mathbb{Z}\}$ sí vamos a usar la condición de banda limitada. Antes de la demostración, una observación:

Las ecuaciones $(ON1)$ y $(ON2)$ NO alcanzan para caracterizar la completitud del sistema pues tenemos el siguiente ejemplo: Sea $\{\psi_{j,k} : j,k\in\mathbb{Z}\}$ un sistema ortonormal. Sea $\alpha(x) = \sqrt{2}\psi(2x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha_{j,k}(x) &= 2^{\frac{j}{2}}\alpha(2^jx-k) = 2^{\frac{j}{2}}\sqrt{2}\psi(2^{j+1}x-2k)\\ &= 2^{\frac{j+1}{2}}\psi(2^{j+1}x-2k) = \psi_{j+1,2k}\end{aligned}$$

y por lo tanto $\{\alpha_{j,k} : j,k\in\mathbb{Z}\}$ también es un sistema ortonormal pero NO puede ser completo pues, por ejemplo, si tomamos $f = \psi_{\ell,1}$ debería valer:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j,k} < f, \alpha_{j,k} > \alpha_{j,k}\\ &= \sum_{j,k} < \psi_{\ell,1}, \psi_{j+1,2k} > \alpha_{j,k}\\ &= \sum_{k} < \psi_{\ell,1}, \psi_{\ell,2k} > \alpha_{\ell-1,k} = 0\end{aligned}$$

pues $< \psi_{\ell,1}, \psi_{\ell,2k} >= 0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.

Vamos a necesitar varios lemas acerca de las funciones de banda limitada. Asumimos a lo largo de toda esta sección que, como ψ es de banda limitada, existe un $J\in\mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{sop}(\hat{\psi}) \subseteq (-2^J, 2^J)$. En primer lugar probamos:

Lema 1.6 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que sop$(\hat{f}) \subseteq I$ con $I = (a,b)$ tal que se cumple: $b - a \leq 2^{-J}$ y $I \cap [-1,1] = \emptyset$. Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$ vale:*

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$$

Demostración: Si $-j \leq J, k \neq 0, \xi \in I$ tenemos que $\xi + 2^{-j}k \notin \text{sop}(\hat{f})$. De hecho, vale que:

$$\begin{array}{lll} k > 0 & \Rightarrow & b = a + (b-a) \leq a + 2^{-J} \leq a + 2^{-J}k \leq a + 2^j k < \xi + 2^j k \\ k < 0 & \Rightarrow & a = b + (a-b) \geq b - 2^{-J} \geq b + 2^{-j}k \geq b + 2^j k > \xi + 2^j k \end{array}$$

si usamos la fórmula 2 del Teorema 1.5 tenemos que:

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$$

lo que prueba el lema si $-j \leq J$. Ahora, si $-j > J$, tenemos que: si $\xi \in I$, como $I \cap [-1,1] = \emptyset$ entonces $|2^{-j}\xi| \geq |2^J \xi| \geq 2^J$ y por lo tanto $\hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 0$. Si $\xi \notin I$ entonces $\hat{f}(\xi) = 0$. En cualquier caso, $\hat{f}(\xi)\hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 0$. Veamos que en este caso también vale $\widehat{(Q_j f)}(\xi) = 0$. Si $\xi + 2^j k \notin I$ entonces $\widehat{f}(\xi + 2^j k) = 0$. Si $\xi + 2^j k \in I$ entonces $|2^{-j}(\xi + 2^j k)| \geq 2^J |\xi + 2^j k| \geq 2^J$ y entonces $\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k) = 0$. Como para todo $k \in \mathbb{Z}$ el punto $\xi + 2^j k$ está en I o no está en I, resulta que, en cualquier caso,

$$\widehat{f}(\xi + 2^j k)\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k) = 0$$

y entonces $\widehat{(Q_j f)}(\xi) = 0$, lo que prueba el lema para el caso $-j > J$. ■

Vamos a probar ahora que la condición $(C1)$ es necesaria para una wavelet ortonormal.

Teorema 1.7 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una wavelet ortonormal de banda limitada. Entonces*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Demostración: Definamos

$$\omega(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2$$

como $\omega(2^n \xi) = \omega(\xi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ basta ver que vale la igualdad $\omega(\xi) = 1$ para casi todo $\xi \in (-2,-1) \cup (1,2)$. Recordar que seguimos con la suposición de que sop$(\hat{\psi}) \subseteq (-2^J, 2^J)$. Como podemos dividir al conjunto $(1,2)$ en 2^J intervalitos I_k tales que $I_k = (a_k, b_k)$ está en las condiciones del Lema 1.6 sólo hay que probar que $\omega(\xi) = 1$ para casi todo $\xi \in I$ con I un intervalo como los del lema.

En un intervalo tal, por el Lema 1.6 tenemos que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que sop$(\hat{f}) \subseteq I$ vale:

$$\int_I \left| \sum_{j=-M}^{M} \widehat{Q_j f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{j=-M}^{M} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi$$

para todo entero M. Como las proyecciones Q_j son proyecciones mutuamente ortogonales, tenemos que

$$\int_I \left| \sum_{j=-M}^{M} \widehat{Q_j f}(\xi) \right|^2 d\xi \quad \leq \quad \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \tag{5}$$

y entonces

$$\int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{j=-M}^{M} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi \quad \leq \quad \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{sop}(\hat{f}) \subseteq I$. Si tomamos $f = \check{\chi}_I$ entonces

$$\sum_{j=-M}^{M} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \leq 1 \qquad a.e. \, \xi \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathbb{N}$$

lo que muestra que la $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$ es convergente para casi todo $\xi \in I$. Más aún, como estamos en las condiciones del Lema 1.6 tenemos que

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(1 - \sum_{j=-M}^{M} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi \quad &= \quad \int_I \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{j=-M}^{M} \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right|^2 d\xi \\ &= \quad \int_I \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{j=-M}^{M} \widehat{(Q_j f)}(\xi) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

en la última expresión tenenemos que el límite cuando M tiende a infinito es cero pues $\hat{f}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Por el lema de Fatou, tenemos que

$$\int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(1 - \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi = 0$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{sop}(\hat{f}) \subseteq I$ y de ahí se deduce que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad a.e. \xi \in I$$

entonces $\omega(\xi) = 1$ para casi todo $\xi \in (-2,-1) \cup (1,2)$ y por lo tanto para casi todo ξ en $\mathbb{R}$. ■

Vamos a probar a continuación que la condición $(C2)$ es necesaria para una wavelet ortonormal. Necesitamos algunos lemas.

Lema 1.8 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de banda limitada tal que $|\hat{\psi}|$ es continua en cero y el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Entonces $\hat{\psi}(0) = 0$.*

Demostración: Usamos la ecuación 1 del Teorema 1.5. Como $\psi \perp W_j \; \forall j \neq 0$ entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(\xi + 2^j k)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k)} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$

como $\mathrm{sop}(\hat{\psi}) \subseteq (-2^J, 2^J)$, si $\xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi})$ y $j \geq J$ entonces $\xi + 2^j k \notin \mathrm{sop}(\hat{\psi})$ para $k \neq 0$. Entonces la ecuación de arriba implica que

$$\hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} = 0 \qquad a.e. \xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi}) \quad j \geq J$$

como fuera del soporte de $\hat{\psi}$ esto es trivialmente cierto, queda que

$$|\hat{\psi}(\xi)|.|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)| = 0 \qquad a.e. \xi \in \mathbb{R} \quad j \geq J$$

en el límite, usando la continuidad de $|\hat{\psi}|$ en cero, tenemos que $|\hat{\psi}(\xi)|.|\hat{\psi}(0)| = 0$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$. Como ψ no es la función nula, resulta que $\hat{\psi}(0) = 0$. ■

Si además tenemos la hipótesis de que ψ es una wavelet, tenemos un resultado más fuerte:

Lema 1.9 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una wavelet ortonormal de banda limitada tal que $|\hat{\psi}|$ es continua en cero. Entonces existe un entorno U del origen tal que $\hat{\psi}(\xi) = 0$ para casi todo $\xi \in U$.*

Demostración: Por el Lema 1.8 tenemos que

$$|\hat{\psi}(\xi)|.|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)| = 0 \quad a.e. \xi \in \mathbb{R} \quad |j| \geq J$$

(si $j \leq -J$ ponemos $\eta = 2^{-j}\xi$ y queda $|\hat{\psi}(2^j\eta)|.|\hat{\psi}(\eta)| = |\hat{\psi}(2^{-k}\eta)|.|\hat{\psi}(\eta)| = 0$ pues $-k > J$). En particular tenemos que $\hat{\psi}(2^j\xi) = 0$ para casi todo $\xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi})$ si $|j| \geq J$. Por lo tanto, si usamos el Teorema 1.7 queda que

$$\sum_{|j|\leq J} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi})$$

Sea Z un conjunto de medida nula tal que la igualdad anterior vale para todo $\xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi})\backslash Z$. Como en esta suma hay a lo sumo $2J - 1$ términos, para cada $\xi \in \mathrm{sop}(\hat{\psi})\backslash Z$ existe un $j = j(\xi) \in (-J, J) \cap \mathbb{Z}$ tal que:

$$|\hat{\psi}(2^{j(\xi)}\xi)| \geq \left(\frac{1}{2J-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

si usamos ahora el Lema 1.8 y la continuidad, tenemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo μ con $|\mu| < \epsilon$ vale:

$$|\hat{\psi}(\mu)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2J-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces para todo $\xi \in \text{sop}(\hat{\psi})\backslash Z$ vale que $|2^{j(\xi)}\xi| \geq \epsilon$ y entonces

$$|\xi|2^J \geq |\xi 2^{j(\xi)}| \geq \epsilon$$

de manera que $|\xi| \geq 2^{-J}\epsilon$. Conluimos que $\hat{\psi}(\xi) = 0 \quad a.e. \, \xi \in (-2^{-J}\epsilon, 2^{-J}\epsilon)$ ■

Estamos ahora en condiciones de demostrar que la condición $(C2)$ es necesaria para una wavelet ortonormal.

Teorema 1.10 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una wavelet ortonormal de banda limitada tal que $|\hat{\psi}|$ es continua en cero. Entonces para todo $q \in 2\mathbb{Z}+1$ vale*

$$\sum_{j\geq 0} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi+q))} = 0 \qquad a.e. \, \xi \in \mathbb{R}$$

Demostración: Por el Lema 1.9 ($\hat{\psi}$ es cero en casi todo punto en un entorno del origen) podemos elegir un $J \in \mathbb{N}$ tal que $\text{sop}(\hat{\psi}) \subseteq [-2^J, -2^{-J}] \cup [2^{-J}, 2^J]$. Usamos ahora otra vez la igualdad 2 del Teorema 1.5 y aislamos el término $k = 0$ para obtener:

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{k\neq 0}\hat{f}(\xi+2^jk)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi+k)}$$

Fijemos a, b tales que $0 < a < b$. Para cada $0 < a < |\xi| < b$ hay sólo finitos valores de j que producen términos no nulos en el segundo miembro de la suma de arriba. Para cada uno de esos valores de j, hay sólo finitos valores de k tales que $\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k) \neq 0$. Miramos los números 2^jk que aparecen en el factor $\hat{f}(\xi + 2^jk)$:

- son finitos por la observación anterior
- escribimos $2^jk = 2^pq$ (queda $k = 2^{p-j}q$) en forma única con $q \in 2\mathbb{Z}+1$ y $p \geq j$

entonces obtenemos la igualdad

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) \;=\; \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{p\geq j}\sum_q \hat{f}(\xi+2^pq)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi+2^pq))}$$

donde no lo indicamos pero lo recordamos: las sumas son finitas. Si sumamos ahora sobre j y usamos el Teorema 1.7 obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{p\geq j}\sum_q \hat{f}(\xi+2^pq)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi+2^pq))} \right) \\
&= \hat{f}(\xi) + \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_q \hat{f}(\xi+2^pq)\sum_{j\leq p}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi+2^pq)}
\end{aligned}$$

entonces tenemos que para $\xi \in (-b,-a)\cup(a,b)$ vale

$$0 = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q}\hat{f}(\xi+2^p q)\sum_{j\le p}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi+2^p q)} \qquad (6)$$

definamos ahora para $k\in 2\mathbb{Z}+1$ la función

$$h_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi+k)}$$

para demostrar el teorema tenemos que ver que $h_k(\xi)=0$ para casi todo $\xi\in\mathbb{R}$ para todo k impar. Si ponemos $p-j=\ell$ en la ecuación (6) nos queda que para casi todo $\xi\in(-b,-a)\cup(a,b)$ vale

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q}\hat{f}(\xi+2^p q)\sum_{\ell\ge 0}\hat{\psi}(2^{\ell-p}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{\ell}(2^{-p}\xi+q))} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q}\hat{f}(\xi+2^p q)h_q(2^{-p}\xi) \qquad (7)\end{aligned}$$

Fijamos ahora q_0 en $2\mathbb{Z}+1$ y $p_0=0$, entonces para cada $\xi_0\in(-b,-a)\cup(a,b)$ existe un $\delta>0$ tal que el conjunto

$$V = (\xi_0+q_0-2\delta,\xi_0+q_0+2\delta)$$

no contiene puntos del tipo $\xi_0+2^p q$ si $(p,q)\neq(0,q_0)$ (pues los p y los q que están en juego son finitos). Definimos ahora

$$U = (\xi_0+q_0-\delta,\xi_0+q_0+\delta)$$

Si consideramos ahora $f\in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}=\chi_U$ la ecuación (7) nos queda que para casi todo $\xi\in(\xi_0-\delta,\xi_0+\delta)\cap(-b,-a)\cup(a,b)$ vale

$$0 = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q}\hat{f}(\xi+2^p q)h_q(2^{-p}\xi) = h_{q_0}(\xi) \qquad (8)$$

pues si

$$|2^p q+\xi-(\xi_0+q_0)|<\delta$$

entonces

$$\begin{aligned} |2^p q+\xi_0-(\xi_0+q_0)| &= |2^p q+\xi_0-\xi+\xi-(\xi_0+q_0)| \\ &\le |2^p q+\xi_0-(\xi_0+q_0)|+|\xi-\xi|<2\delta\end{aligned}$$

Dado que ξ_0 es un punto arbitrario de $(-b,-a)\cup(a,b)$ la igualdad (8) es válida para casi todo $\xi\in(-b,-a)\cup(a,b)$. Haciendo $a\to 0$ y $b\to\infty$ tenemos que $h_{q_0}(\xi)=0$ para casi todo ξ en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Observar además que también $h_{q_0}(0)=0$ dado que $\hat{\psi}(0)=0$. La demostración está completa pues $q_0\in 2\mathbb{Z}+1$ es arbitrario.

■

Para terminar esta sección vamos a probar la suficiencia de las ecuaciones $(C1)$ y $(C2)$ para caracterizar la completitud del sistema ortonormal $\{\psi_{j,k}:j,k\in\mathbb{Z}\}$. Es el contenido del siguiente

Teorema 1.11 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de banda limitada, $\hat{\psi} = 0$ en un entorno del origen y $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ un sistema ortonormal. Si se satisfacen*

1. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

2. $\sum_{j\geq 0} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + q))} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\, \forall q \in 2\mathbb{Z} + 1$

entonces ψ es una wavelet ortonormal.

Demostración: Basta ver que $\hat{f}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi)$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Usamos la ecuación 2 del Teorema 1.5:

$$\widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{k\neq 0} \hat{f}(\xi + 2^j k)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k)}$$

para cada j y para $k \neq 0$, escribimos $2^j k = 2^n q$ con $n = j+p$, $p \geq 0$ y $q \in 2\mathbb{Z}+1$. Como ψ es de banda limitada y $\hat{\psi}$ es cero en un entorno del origen, hay sólo finitos valores de j que producen términos no nulos en el segundo miembro de la igualdad anterior. Para cada uno de esos j, tenemos sólo finitos valores de k tales que $\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k) \neq 0$, de manera que si sumamos sobre j vamos a tener sólo sumas finitas.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\sum_{k\neq 0} \hat{f}(\xi + 2^j k)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + k)} \right)$$

y como por hipótesis tenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$

queda

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi) &= \hat{f}(\xi) + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{p\geq 0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi + 2^{j+p}q)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^{j+p}q)} \\
&= \hat{f}(\xi) + \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^n q)\sum_{j\leq n} \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^n q)} \\
&= \hat{f}(\xi) + \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^n q)\sum_{p\geq 0} \hat{\psi}(2^p\mu)\overline{\hat{\psi}(2^p(\mu + q)}
\end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$\sum_{p\geq 0} \hat{\psi}(2^p\mu)\overline{\hat{\psi}(2^p(\mu + q)} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ q \in 2\mathbb{Z} + 1$$

de manera que resulta la igualdad buscada:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{(Q_j f)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}$$

■

2. Caracterización de wavelets ortonormales (el caso general)

El objetivo de esta sección es demostrar otra vez el Teorema 1.2 pero sin la hipótesis adicional de banda limitada para ψ. Vamos a demostrar en realidad el siguiente

Teorema 2.1 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con $\|\psi\|_2 = 1$. La función ψ es una wavelet ortonormal si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones*

$$(A1) \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$(A2) \qquad \sum_{j\geq 0} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi+q))} = 0 \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}\, \forall q \in 2\mathbb{Z}+1$$

La condición $\|\psi\|_2 = 1$ es claramente necesaria para que el sistema sea ortonormal, pero de este teorema se desprende que las ecuaciones $(A1)$ y $(A2)$ junto con la hipótesis de norma 1 para ψ implican las ecuaciones $(ON1)$ y $(ON2)$. Esto se debe a que en realidad para demostrar el Teorema 2.1 vamos a probar el siguiente

Teorema 2.2 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Son equivalentes*[1]*:*

$$(B1) \qquad \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k} = f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$(B2) \qquad \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} | < f, \psi_{j,k} > |^2 = \|f\|_2^2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

$(B3) \qquad$ *ψ cumple las ecuaciones $(A1)$ y $(A2)$*

Con esto demostramos que si para $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ se satisfacen las condiciones $(A1)$ y $(A2)$ lo que resulta es que el sistema $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ es un frame ajustado de constante 1. Sabemos que si agregamos a esto la condición de que la norma de todos los elementos del frame es 1 entonces tenemos una base ortonormal. Para ilustrar el comentario anterior, incluimos en este momento un ejemplo de una función de $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface las condiciones $(A1)$ y $(A2)$ pero tal que el sistema $\{\psi_{j,k}\}$ NO es ortonormal. Sea $b(t)$ una función con las siguientes propiedades:

- b es una función par no negativa
- $\{t \geq 0 : b(t) > 0\} \subseteq [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$
- $b^2(t) + b^2(\frac{1}{2}t) = 1$ para $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
- $\text{sop}(b) \subseteq [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}] = E$

[1] Es un resultado conocido que $(B1)$ y $(B2)$ son equivalentes. Sólo probaremos la equivalencia entre $(B2)$ y $(B3)$.

Sea ψ tal que $|\hat{\psi}| = b$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\hat{\psi}(2^j\xi)\hat{\psi}(2^j(\xi+q))| &= |\hat{\psi}(2^j\xi)||\hat{\psi}(2^j(\xi+q))| \\
&= b(t).b(t+2^j q) \\
&= 0 \qquad \text{si } j \geq 0,\ q \text{ impar}
\end{aligned}$$

entonces vale la condición ($A2$). Ahora, observemos que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, si $b(2^j\xi) \neq 0$ y $b(2^k\xi) \neq 0$ entonces $|j-k| = 1$ y por lo tanto hay sólo dos términos no nulos para cada ξ en la suma de la ecuación ($A1$). Entonces, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = b^2(2^j\xi) + b^2(2^{j+1}\xi) = 1$$

y entonces se verifica la ecuación ($A1$). Para ver que el sistema $\{\psi_{j,k}\}$ NO es ortonormal vemos que el sistema $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no puede ser ortonormal, pues si lo fuera la medida del soporte de $\hat{\psi}$ debería ser mayor o igual a uno. En nuestro caso tenemos que $|\mathrm{sop}(\hat{\psi})| \leq \frac{3}{4}$.

Vamos a probar ahora el Teorema 2.2. Para eso vamos a usar el siguiente resultado:

Lema 2.3 *Sea $\{e_j : j = 1, 2, ...\}$ una familia de elementos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ tal que*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} < f, e_j > e_j = f$$

para todo f en un conjunto denso $\mathcal{D}$ de $\mathbb{H}$. Entonces la igualdad vale para todo elemento de $\mathbb{H}$.

Vamos a demostrar el Teorema 2.2. En primer lugar vemos que ($B3$) $\Rightarrow$ ($B2$). La idea es demostrar que si se cumplen las ecuaciones ($A1$) y ($A2$) para toda $f \in \mathcal{D}$ entonces vale la igualdad ($B2$) para toda $f \in \mathcal{D}$ y por el Lema 2.3 vale ($B2$) para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Empezamos probando que el conjunto

$$\mathcal{D} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{sop}(\hat{f})\,\text{compacto},\ \mathrm{sop}(\hat{f}) \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$$

es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Para eso veamos que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que $< f, g >= 0$ para toda $g \in \mathcal{D}$ entonces $f = 0$. Sea entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que para toda $g \in \mathcal{D}$ vale

$$0 =< f, g >$$

entonces por Plancherel

$$0 =< f, g >= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$$

en particular, como para todo $A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ medible acotado la función f tal que $\hat{f} = \chi_A$ está en $\mathcal{D}$, tenemos que

$$0 = \int_A \hat{f}(\xi)d\xi$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ medible acotado. Entonces $\hat{f}(\xi) = 0$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $f \equiv 0$. Esto prueba que $\mathcal{D}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Podemos probar ahora la primera parte del teorema. Vamos a estudiar la expresión (para $f \in \mathcal{D}$)

$$I = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |< f, \psi_{j,k} >|^2$$

Usamos otra vez que

$$\hat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} e^{-2\pi i \xi k 2^{-j}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi)$$

de modo que por Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} e^{2\pi i \frac{\xi}{2^j} k} d\xi|^2 \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} 2^{-j} | \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2^j\mu)\overline{\hat{\psi}(\mu)} e^{2\pi i \mu k} 2^j d\mu|^2 \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} 2^{j} | \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2^j\mu)\overline{\hat{\psi}(\mu)} e^{2\pi i \mu k} d\mu|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} | \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2^{-j}\mu)\overline{\hat{\psi}(\mu)} e^{2\pi i \mu k} d\mu|^2 \qquad (9)
\end{aligned}$$

Definamos $f_j(\xi) = \hat{f}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Cada una de las funciones f_j resulta entonces en $L^2(\mathbb{R})$ y de soporte compacto en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si definimos ahora la función

$$F_j(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi + \ell)$$

ésta resulta 1-periódica y en $L^2(\mathbb{T})$ pues como el soporte de f_j es compacto, podemos suponer que está contenido en un intervalo finito $[a, b]$. Sea $L \in \mathbb{Z}$ tal que $L > b$ y $1 - L < a$. Entonces para todo $\xi \in [0, 1]$ tenemos que $f_j(\xi + k) = 0$ para todo $|k| \geq L$. Por lo tanto, $F(\xi) = \sum_{|k|<L} f_j(\xi + k)$ (es una suma finita de funciones en $L^2(\mathbb{T})$). Podemos calcular sus coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned}
\hat{F}(k) &= \int_0^1 \left(\sum_{|\ell|\leq L} f_j(\xi + \ell) \right) e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\
&= \sum_{|\ell|\leq L} \int_0^1 f_j(\xi + \ell) e^{-2\pi i k \xi} d\xi \\
&= \sum_{|\ell|\leq L} e^{2\pi i k \ell} \int_{\ell}^{\ell+1} f_j(\mu) e^{-2\pi i k \mu} d\mu
\end{aligned}$$

como para todo $\ell, k \in \mathbb{Z}$ tenemos que $e^{2\pi i k\ell} = 1$ nos queda

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\ell|\leq L} \int_{\ell}^{\ell+1} f_j(\mu) e^{-2\pi i k\mu} d\mu \\ &= \int_{-L}^{L} f_j(\mu) e^{-2\pi i k\mu} d\mu \\ &= \hat{f}_j(k) \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell) = F_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}_j(k) e^{2\pi i k\xi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) e^{2\pi i k\xi}$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{T})$. Entonces tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) e^{2\pi i k\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell) d\xi \tag{10}$$

con las series convergentes en $L^2(\mathrm{sop}(\hat{f}))$. Ahora, para la parte izquierda de la igualdad escribimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) e^{2\pi i k\xi} d\xi &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \hat{f}_j(k) e^{2\pi i k\xi} d\xi \qquad (11) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) \int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} e^{2\pi i k\xi} d\xi \qquad (12) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) \overline{\int_{\mathbb{R}} f_j(\xi) e^{-2\pi i k\xi} d\xi} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(k) \overline{\hat{f}_j(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_j(k)|^2 \end{aligned}$$

y entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell) d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_j(k)|^2 \tag{13}$$

Entonces en la ecuación (9) al reemplazar queda

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2^{-j}\mu) \overline{\hat{\psi}(\mu)} e^{2\pi i\mu k} d\mu|^2 \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\int_{\mathbb{R}} f_j(\xi) e^{-2\pi i\mu k} d\mu|^2 \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_j(k)|^2 \end{aligned}$$

y usamos la ecuación (13) y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_j(\xi)} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell) d\xi \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^{-j}\xi)} \hat{\psi}(\xi) \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell)) \overline{\hat{\psi}(\xi+\ell)} d\xi \end{aligned}$$

Ahora aislamos el término correspondiente a $\ell = 0$ y tenemos $I = I_0 + I_1$ con

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^{-j}\xi)|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ I_1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^{-j}\xi)} \hat{\psi}(\xi) \sum_{\ell\neq 0} \hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell)) \overline{\hat{\psi}(\xi+\ell)} d\xi \end{aligned}$$

Observamos que en I_0 dado que los términos de la suma son no negativos, podemos cambiar el orden de la suma y la integral nos queda que

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^{-j}\xi)|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\mu)|^2 |\hat{\psi}(2^j\mu)|^2 d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\mu)|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\mu)|^2 d\mu \\ &= \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la hipótesis $(A1)$. Para poder cambiar el orden de la suma con la integral en I_1 necesitamos el siguiente

Lema 2.4 *Para toda $f \in \mathcal{D}$ vale:*

$$K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{\psi}(\xi)| \sum_{\ell\neq 0} |\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))||\hat{\psi}(\xi+\ell)| d\xi < \infty$$

Una consecuencia de este Lema es que I es finito para toda $f \in \mathcal{D}$ si y sólo si I_0 es finito y esto es cierto si y sólo si la suma

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$$

es una función localmente integrable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Demostración: (del Lema 2.4) Tenemos que

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{\psi}(\xi)| \sum_{\ell\neq 0} |\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))||\hat{\psi}(\xi+\ell)| d\xi \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell\neq 0} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{\psi}(\xi)||\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))||\hat{\psi}(\xi+\ell)| d\xi \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell\neq 0} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))| \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 + |\hat{\psi}(\xi+\ell)|^2}{2} d\xi \quad (14) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \sum_{\ell\neq 0} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))||\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \quad (15)
\end{aligned}$$

donde usamos en (14) que $2ab \leq a^2 + b^2$ y en (15) convergencia monótona para cambiar la suma con la integral y que la expresión con $|\hat{\psi}(\xi+\ell)|^2$ coincide con la expresión con $|\hat{\psi}(\xi)|^2$ pues estamos sumando sobre $\ell \in \mathbb{Z}$. Resta ver entonces que la integral de la ecuación (15) es finita. Esto es consecuencia del siguiente

Lema 2.5 *Sean a y b tales que $0 < a < b < \infty$, $f \in \mathcal{D}$ y sop$(\hat{f}) \subseteq (-b,-a) \cup (a,b)$. Sea $\delta =$diam(sop$(\hat{f})$) . Entonces*

$$\sigma(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell\neq 0} 2^{-j} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))| \leq 2\delta \left(1 + \log_2 \frac{b}{a}\right) \|\hat{f}\|^2_{L^\infty} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Vamos a estimar cuántos términos no nulos aparecen en la suma para cada ξ fijo. Si $2^{-j} > \delta$ entonces a lo sumo uno de los puntos $2^{-j}\xi$, $2^{-j}\xi + 2^{-j}\ell$ puede caer en el soporte de $\hat{f}$ pues la diferencia es

$$|2^{-j}\xi - 2^{-j}\xi - 2^{-j}\ell| = |2^{-j}\ell| > \delta$$

pues $\ell \neq 0$. Entonces en la suma podemos quedarnos con sólo aquellos $j \geq j_0$ donde $j_0 = \min\{j \in \mathbb{Z} : 2^{-j} \leq \delta\}$. Para cada uno de esos j tenemos que

$$2^{-j} |\hat{f}(2^{-j}\xi)||\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell))| \leq 2^{-j} \|\hat{f}\|^2_{L^\infty}$$

Además, la cantidad de valores de ℓ que hacen que $\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell)) \neq 0$ no puede ser mayor que $1 + 2^j\ell$ pues si tenemos ℓ, k tales que

$$\hat{f}(2^{-j}(\xi+\ell)) \neq 0 \quad \text{y} \quad \hat{f}(2^{-j}(\xi+k)) \neq 0$$

entonces $|2^{-j}(\xi+k) - 2^{-j}(\xi+\ell)| < \delta$ y por lo tanto $|\ell - k| < 2^j\delta$. Entonces para cada j que produce términos no nulos, éstos aportan a $\sigma(\xi)$ a lo sumo la cantidad

$$\left(1 + 2^j\delta\right) 2^{-j} \|\hat{f}\|^2_{L^\infty} \leq \left(2^{-j_0} + \delta\right) \|\hat{f}\|^2_{L^\infty} \leq 2\delta \|\hat{f}\|^2_{L^\infty}$$

pues $j \geq j_0$ y $2^{-j_0} \leq \delta$. Finalmente, veamos que para que $|\hat{f}(2^{-j}\xi)| \neq 0$ debe valer que

$$a \leq |2^{-j}\xi| \leq b \iff \frac{a}{|\xi|} \leq 2^{-j} \leq \frac{b}{|\xi|} \iff j \in [\log_2 \frac{|\xi|}{b}, \log_2 \frac{|\xi|}{a}]$$

y en este intervalo hay a lo sumo $1+\log_2 \frac{b}{a}$ enteros, de manera que tenemos la acotación buscada:

$$\sigma(\xi) \le \left(1+\log_2 \frac{b}{a}\right) 2\delta \|\hat{f}\|^2_{L^\infty}$$

Con esto termina la demostración del Lema 2.5 y por lo tanto la del Lema 2.4. ■

Estamos ahora en condiciones de seguir con la demostración del Teorema 2.2. Definimos

$$t_q(\xi) = \sum_{\ell \ge 0} \hat{\psi}(2^\ell \xi)\overline{\hat{\psi}(2^\ell(\xi+q))} \qquad \text{para } q \in \mathbb{Z}$$

y vemos que es una función de $L^1(\mathbb{R})$, pues

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |t_q(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\sum_{\ell \ge 0} \hat{\psi}(2^\ell \xi)\overline{\hat{\psi}(2^\ell(\xi+q))}| d\xi \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\ell\ge 0} |\hat{\psi}(2^\ell\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell\ge 0} |\hat{\psi}(2^\ell(\xi+q)|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\xi && (16)\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell\ge 0} |\hat{\psi}(2^\ell\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell\ge 0} |\hat{\psi}(2^\ell(\xi+q)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} && (17)\\
&= \left(\sum_{\ell\ge 0} \int_{\mathbb{R}} 2^{-\ell} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell\ge 0} 2^{-\ell} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\|\hat{\psi}\|_2 . \sqrt{2}\|\hat{\psi}\|_2 = 2\|\hat{\psi}\|_2^2 < \infty && (18)
\end{aligned}$$

Usamos en (16) que si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\{\hat{\psi}(2^\ell\xi)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ está en $\ell^2(\mathbb{N})$ y más aún: $\left(\sum_{\ell\ge 0} |\hat{\psi}(2^\ell\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ (esto último lo usamos en (17)). Recordar que teníamos

$$I_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^{-j}\mu)} \hat{\psi}(\mu) \sum_{k\ne 0} \hat{f}(2^{-j}(\mu+k)) \overline{\hat{\psi}(\mu+k)} d\mu \qquad (19)$$

y que gracias al Lema 2.4 podemos cambiar la suma en j con la integral. Vamos a escribir ahora a I_1en términos de t_q con $q \in 2\mathbb{Z}+1$.

Lema 2.6 *Sea $f \in \mathcal{D}$. Entonces*

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{f}(\xi + 2^p q) t_q(2^{-p}\xi) d\xi$$

Demostración: Si en la ecuación (19) hacemos el cambio de variables $\xi = 2^{-j}\mu$ obtenemos

$$I_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)}\hat{\psi}(2^j\xi) \sum_{k\neq 0} \hat{f}(\xi + 2^{-j}k)\overline{\hat{\psi}(2^j\xi + k)}d\xi$$

y como $k \neq 0$ tenemos que existen únicos ℓ, q tales que $k = 2^\ell q$ con $q \in 2\mathbb{Z}+1$ y $\ell \geq 0$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)}\hat{\psi}(2^j\xi) \sum_{\ell\geq 0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^{\ell-j}q)\overline{\hat{\psi}(2^\ell(2^{j-\ell}\xi + q)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{\ell\geq 0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^{p}q)\hat{\psi}(2^{\ell-p}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^\ell(2^{-p}\xi + q)}d\xi \qquad \text{con } p = \ell - j \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^{p}q) \sum_{\ell\geq 0} \hat{\psi}(2^{\ell-p}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^\ell(2^{-p}\xi + q)}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^{p}q)t_q(2^{-p}\xi)d\xi
\end{aligned}$$

■

Podemos resumir lo obtenido hasta ahora para la expresión I en la siguiente

Proposición 2.7 *Sea $f \in \mathcal{D}$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |< f, \psi_{j,k} >|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2\right) d\xi + \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^{p}q)t_q(2^{-p}\xi)d\xi
\end{aligned}$$

De esta proposición se deduce entonces que si valen las ecuaciones $(A1)$ y $(A2)$ entonces tenemos la validez de la ecuación $(B2)$ del Teorema 2.2 para toda $f \in \mathcal{D}$. Por el Lema 2.3 (usamos la densidad de $\mathcal{D}$) tenemos que vale la ecuación $(B2)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, de manera que el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ resulta completo y como tenemos la condición $\|\psi\|_2 = 1$ resulta que ψ es una wavelet ortonormal. Esto finaliza la demostración de la primera parte del Teorema 2.1 (probamos la suficiencia de las condiciones $(A1)$ y $(A2)$).

Vamos a probar ahora que si vale $(B2)$ entonces se satisfacen las ecuaciones $(A1)$ y $(A2)$. Por la observación que sigue al Lema 2.4 tenemos que como I es finito entonces la función

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$$

es localmente integrable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Sea $\xi_0 \neq 0$ un punto de Lebesgue para esa función. Entonces

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 d\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 \qquad \text{con } [\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta] \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

sean I^δ, I_0^δ e I_1^δ los correspondientes I, I_0 e I_1 asociados a la función $f = f_\delta$ con

$$\hat{f}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[\xi_0-\delta,\xi_0+\delta]}(\xi)$$

Por la Proposición 2.7 y la condición $(B1)$ tenemos que

$$I^\delta = \|f_\delta\|_2^2 = \|\hat{f}_\delta\|_2^2 = \int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} \frac{1}{2\delta} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 d\xi + I_1^\delta$$

y como $\|\hat{f}_\delta\|_2^2 = 1$ entonces

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 + \lim_{\delta\to 0^+} I_1^\delta$$

Si probamos entonces que $\lim_{\delta\to 0^+} I_1^\delta = 0$ tendremos que $1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$ para todo punto de Lebesgue de $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$ y por lo tanto valdrá la ecuación $(A1)$. Para calcular I_1^δ razonamos como en el Lema 2.4 para tener

$$|I_1^\delta| \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\neq 0} 2^{-j} |\hat{f}_\delta(2^{-j}\xi)||\hat{f}_\delta(2^{-j}(\xi+k))||\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \tag{20}$$

Ahora aplicamos el Lema 2.5 para esta elección de f. El diámetro del soporte de $\hat{f}$ es 2δ. Entonces, si $2^{-j} > 2\delta$ resulta que

$$|\hat{f}_\delta(2^{-j}\xi)||\hat{f}_\delta(2^{-j}(\xi+k))| = 0$$

Sea $j_0 = \min\{n \in \mathbb{Z} : 2^n \geq \frac{1}{2\delta}\}$. Bastará considerar entonces en la suma (20) sólo los $j \geq j_0$. Además, si $|\hat{f}_\delta(2^{-j}\xi)| \neq 0$ debe valer que $\xi_0 - \delta < 2^{-j}\xi$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $0 < \xi_0 - \delta$ de modo que la integral en (20) es sobre la región

$$\{\xi : 2^j(\xi_0 - \delta) < \xi\} \subseteq \{\xi : \frac{\xi_0 - \delta}{2\delta} < \xi\} = \Omega$$

Si usamos la notación del Lema 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
|I_1^\delta| &\leq \int_\Omega \sigma_\delta(\xi)|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{\xi_0-\delta}{2\delta}}^{\infty} \sigma_\delta(\xi)|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\frac{\xi_0-\delta}{2\delta}}^{\infty} 4\delta \left(1 + \log_2 \frac{\xi_0+\delta}{\xi_0-\delta}\right) \frac{1}{2\delta} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2\left(1 + \log_2 \frac{\xi_0+\delta}{\xi_0-\delta}\right) \int_{\frac{\xi_0-\delta}{2\delta}}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos que $\lim_{\delta\to 0^+} I_1^\delta = 0$ y vale $(A1)$. Sólo falta ver ahora que si vale la ecuación $(B2)$ entonces vale $(A2)$. Por la Proposición 2.7 y el hecho recién probado de que vale $(A1)$ tenemos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{f}(\xi + 2^p q) t_q(2^{-p}\xi) d\xi$$

para toda $f \in \mathcal{D}$, lo que por polarización implica que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{g}(\xi + 2^p q) t_q(2^{-p}\xi) d\xi \tag{21}$$

para toda elección de f y g en $\mathcal{D}$. Fijamos ahora un entero impar q_0 y sea ξ_0 un punto de Lebesgue de t_{q_0} tal que $\xi_0 \neq 0$ y $\xi_0 + q_0 \neq 0$. Podemos asumir también que δ es suficientemente chico como para que los intervalos $[\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta]$ y $[\xi_0 + q_0 - \delta, \xi_0 + q_0 + \delta]$ no contengan al cero. Podemos asumir también que $\xi_0 > 0$ y que $0 < \delta < \frac{1}{3}\xi_0$. Sean $f = f_\delta$ y $g = g_\delta$ funciones tales que

$$\hat{f}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \chi_{[\xi_0-\delta,\xi_0+\delta]}$$

y

$$\hat{g}_\delta(\xi) = \hat{f}_\delta(\xi - q_0)$$

Entonces vale que

$$\hat{f}_\delta(\xi)\hat{g}_\delta(\xi + q_0) = \frac{1}{2\delta} \chi_{[\xi_0-\delta,\xi_0+\delta]}(\xi)$$

La ecuación (21) puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\delta}\int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} t_{q_0}(\xi) d\xi + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\delta(\xi)} \hat{g}(\xi + 2^p q) t_q(2^{-p}\xi) d\xi \qquad \text{con } (p,q) \neq (0, q_0) \\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} t_{q_0}(\xi) d\xi + J_\delta \end{aligned}$$

Como el primer sumando tiende a $t_{q_0}(\xi_0)$ sólo resta probar que J_δ tiende a cero cuando δ tiende a cero. Volvemos a analizar para qué valores de p y q se producen términos no nulos en la suma que define a J_δ. Si $\overline{\hat{f}_\delta(\xi)}\hat{g}(\xi + 2^p q) \neq 0$ tiene que verificarse:

$$|\xi - \xi_0| \leq \delta \quad \text{y} \quad |\xi + 2^p q - q_0 - \xi_0| \leq \delta$$

Entonces

$$\begin{aligned} |2^p q - q_0| &\leq |2^p q - q_0 + \xi - \xi_0 - (\xi - \xi_0)| \\ &\leq |\xi + 2^p q - q_0 - \xi_0| + |\xi - \xi_0| \\ &< 2\delta \end{aligned} \tag{22}$$

Como estamos mirando qué pasa para valores chicos de δ, podemos asumir que $\delta < \frac{1}{2}$. Entonces la desigualdad anterior impone la condición

$$|2^p q - q_0| < 1$$

Consideremos los casos:

- si $p > 0$ entonces $2^p q - q_0$ es impar y vale $|2^p q - q_0| \geq 1$
- si $p = 0$ entonces $q \neq q_0$ y vale $|q - q_0| \geq 1$
- si $p < 0$ entonces $|2^p q - q_0| = 2^p |q - 2^{-p} q_0| \geq 2^p$ pues q es impar

entonces, por la desigualdad (22) tiene que valer $2^p \leq 2\delta$. Podemos escribir ahora una expresión para J_δ en el caso $\delta < \frac{1}{2}$ y con j_0 el máximo de los j tales que $2^j \leq 2\delta$:

$$\begin{aligned} J_\delta &= \sum_{p \leq j_0} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{g}(\xi + 2^p q) t_q(2^{-p}\xi) d\xi \\ &= \sum_{p \leq j_0} \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} 2^p \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(2^p \xi)} \hat{g}(2^p(\xi + q) t_q(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Usamos ahora que

$$\begin{aligned} |t_q(\xi)| &= \sum_{\ell \geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)| |\hat{\psi}(2^\ell(\xi + q))| \\ &\leq \sum_{\ell \geq 0} \frac{|\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 + |\hat{\psi}(2^\ell(\xi + q))|^2}{2} \end{aligned}$$

y entonces

$$2|t_q(\xi)| \leq \sum_{\ell \geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 + \sum_{\ell \geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell(\xi + q))|^2$$

Definamos

$$\tau(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2$$

y observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell \geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 d\xi \\ &= 2\|\hat{\psi}\|_2^2 < \infty \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$|J_\delta| \leq J_\delta^{(1)} + J_\delta^{(2)}$$

con

$$J_\delta^{(1)} = \sum_{p\le j_0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} 2^p \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^p\xi)||\hat{g}(2^p(\xi+q)||\tau(\xi)|d\xi$$

y

$$\begin{aligned} J_\delta^{(2)} &= \sum_{p\le j_0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} 2^p \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^p\xi)||\hat{g}(2^p(\xi+q)||\tau(\xi+q)|d\xi \\ &= \sum_{p\le j_0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} 2^p \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(2^p(\eta-q)||\hat{g}(2^p(\eta)||\tau(\eta)|d\eta \end{aligned}$$

Podemos ver que $J_\delta^{(1)}$ y $J_\delta^{(2)}$ tienen la misma forma salvo que los roles de $\hat{f}_\delta$ y $\hat{g}_\delta$ están intercambiados. Como tenemos que $\hat{f}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\chi_{[\xi_0-\delta,\xi_0+\delta]}$ resulta que

$$J_\delta^{(1)} = \sum_{p\le j_0}\sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \frac{2^p}{\sqrt{2\delta}} \int_{2^{-p}(\xi_0-\delta)}^{2^{-p}(\xi_0+\delta)} |\hat{g}(2^p(\xi+q)||\tau(\xi)|d\xi$$

Fijamos p. Recordar que teníamos la condición

$$|2^p q - q_0| \le 2\delta$$

que implica que $|q-2^{-p}q_0| \le 2^{-p}2\delta$. Como q es impar y $2^{-p}q_0$ es par, $q-2^{-p}q_0$ es impar. Calculamos la cantidad de enteros impares en $[-2^{-p}2\delta, 2^{-p}2\delta]$. Si $N = \max\{n\in\mathbb{Z} : n \text{ impar }, n \le 2^{-p}2\delta\}$ entonces hay a lo sumo $2N$ enteros impares en el intervalo. Entonces tenemos que hay a lo sumo $2(2^{-p}2\delta) = 2^{-p}4\delta$ enteros impares en el intervalo.

Entonces,

$$\begin{aligned} J_\delta^{(1)} &= \sum_{p\le j_0} \frac{2^p}{\sqrt{2\delta}} \int_{2^{-p}(\xi_0-\delta)}^{2^{-p}(\xi_0+\delta)} |\tau(\xi)| \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} |\hat{g}(2^p(\xi+q)|d\xi \\ &\le \sum_{p\le j_0} \frac{2^p}{\sqrt{2\delta}} \int_{2^{-p}(\xi_0-\delta)}^{2^{-p}(\xi_0+\delta)} 2^{-p}4\delta\frac{1}{\sqrt{2\delta}}|\tau(\xi)|d\xi \\ &= 2\sum_{p\le j_0} \int_{2^{-p}(\xi_0-\delta)}^{2^{-p}(\xi_0+\delta)} |\tau(\xi)|d\xi \end{aligned}$$

Como asumimos que $0<\delta<\frac{1}{3}\xi_0$ los intervalos $[2^{-p}(\xi_0-\delta), 2^{-p}(\xi_0+\delta)]$ son disjuntos para $p = j_0, j_0-1, j_0-2, ...$ y entonces

$$\begin{aligned} J_\delta^{(1)} &\le 2\sum_{p\le j_0} \int_{2^{-p}(\xi_0-\delta)}^{2^{-p}(\xi_0+\delta)} |\tau(\xi)|d\xi \\ &\le 2\int_{2^{-j_0}(\xi_0-\delta)}^{\infty} |\tau(\xi)|d\xi \le 2\int_{\frac{(\xi_0-\delta)}{2\delta}}^{\infty} |\tau(\xi)|d\xi \end{aligned}$$

La última expresión tiende a cero cuando δ tiende a cero pues $\tau \in L^1(\mathbb{R})$, de modo que $\lim_{\delta \to 0^+} J_\delta^{(1)} = 0$. El caso $\xi_0 < 0$ se resulve en forma similar. Para probar que $\lim_{\delta \to 0^+} J_\delta^{(2)} = 0$ se puede razonar en forma análoga, intercambiando los roles de $\hat{f}_\delta$ y de $\hat{g}_\delta$. Esto concluye la demostración del Teorema 2.1.

3. Algunas notas

Incluimos algunas notas que pretenden ser aclaratorias:

Nota 0

En varias demostraciones el cambio de orden entre suma e integral está justificado por la siguiente versión del teorema de Beppo-Levi:

Teorema 3.1 *Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en el espacio (X, μ) tales que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |g_n(x)| d\mu < \infty$$

entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ converge para μ-casi todo x en X a una función integrable y vale

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n(x) d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) d\mu$$

Nota 1

En la ecuación (2) cambiamos el orden de la integral con la suma gracias al teorema de Beppo-Levi pues tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{\psi}(2^j(t+\ell)|.|\hat{\psi}(t+\ell)|dt &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^j(t+\ell)|.|\hat{\psi}(t+\ell)|dt \\ &\leq \|\hat{\psi}(2^j \cdot)\|_{L^2}.\|\hat{\psi}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Otro lugar en el que se usa un resultado similiar es en (3).

Nota 2

En (5) usamos Pitágoras:

$$\begin{aligned} \int_I \left| \sum_{j=-M}^{M} \widehat{Q_j f}(\xi) \right|^2 d\xi &= \| \sum_{j=-M}^{M} \widehat{Q_j f}(\xi) \|_2^2 \\ &= \sum_{j=-M}^{M} \|\widehat{Q_j f}(\xi)\|_2^2 \\ &\leq \|\hat{f}\|_2^2 = \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Nota 3

En la ecuación (10) afirmamos que la convergencia de las series es en $L^2(\text{sop}(\hat{f}))$. Veamos por qué. La serie del lado derecho de la igualdad es

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell)$$

que es en realidad una suma finita para todo $\xi \in \text{sop}(\hat{f})$. Más aún, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_j(\xi+\ell) = \sum_{|\ell|\leq L} f_j(\xi+\ell)$ para todo $\xi \in L^2(\text{sop}(\hat{f}))$. Para la serie del lado izquierdo tenemos que

$$\|F_j(\xi) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\xi}\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \quad \to \quad 0$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\|F_j(\xi) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\xi}\|^2_{L^2((\text{sop}(\hat{f}))} &= \int_{(\text{sop}(\hat{f}))} |F_j(\xi) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\xi}|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\ell|\leq N} \int_{\ell}^{\ell+1} |F_j(\xi) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\xi}|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\ell|\leq N} \int_0^1 |F_j(\mu-\ell) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik(\mu-\ell)}|^2 d\mu
\end{aligned}$$

y como tanto F_j como $e^{2\pi ik\xi}$ son 1-periódicas queda

$$\begin{aligned}
\|F_j(\xi) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\xi}\|^2_{L^2((\text{sop}(\hat{f}))} &= \sum_{|\ell|\leq N} \int_0^1 |F_j(\mu) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\mu}|^2 d\mu \\
&= (2N-1) \sum_{|\ell|\leq N} \int_0^1 |F_j(\mu) - \sum_{|k|\leq M} \hat{f}_j(k)e^{2\pi ik\mu}|^2 d\mu
\end{aligned}$$

La última expresión tiende a cero cuando M tiende a infinito.

Nota 5

En la ecuación (11) estamos usando el siguiente hecho válido en espacios de Hilbert: Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, $f \in \mathbb{H}$ fijo. Si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k < f, g_k >$ converge en $\mathbb{H}$ entonces vale

$$< f, \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k g_k > \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k < f, g_k >$$

Es claro que si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k < f, g_k >$ converge en $\mathbb{H}$ entonces

$$\lim_{M\to\infty} < f, \sum_{k=1}^{M} \alpha_k g_k > \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k < f, g_k >$$

Lo que usamos ahora es que la aplicaión $< f, \cdot >: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es continua y entonces

$$\lim_{M\to\infty} < f, \sum_{k=1}^{M} \alpha_k g_k > \quad = \quad < f, \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k g_k >$$

Nota 6

En las ecuaciones (16) y (17) usamos que $\left(\sum_{\ell\geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. La cuenta es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{\ell\geq 0} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 d\xi &= \sum_{\ell\geq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^\ell \xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{\ell\geq 0} 2^{-\ell} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\mu)|^2 d\mu \\
&= \sum_{\ell\geq 0} 2^{-\ell} \|\hat{\psi}\|_2^2 = 2\|\hat{\psi}\|_2^2
\end{aligned}$$

Nota 7

En la ecuación (21) argumentamos que la igualdad vale por polarización. Nos referimos a los siguientes resultados válidos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ *complejo* cualquiera:

Lema 3.2 *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Sea A un operador lineal acotado. Entonces valen las siguientes propiedades*

1. $A = A^*$ si y sólo si $< Ah, h > \in \mathbb{R}$ para todo $h \in \mathbb{H}$.
2. Si $< Ah, h >= 0$ para todo $h \in \mathbb{H}$ entonces $< Ag, h >= 0$ para toda elección de h y g en $\mathbb{H}$ y por lo tanto $A \equiv 0$.

Los resultados anteriores valen también si las hipótesis se verifican sobre algún subespacio denso en $\mathbb{H}$. En nuestro caso, tenemos que el operador A está definido como

$$A\hat{g} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{q\in 2\mathbb{Z}+1} \hat{g}(\cdot + 2^p q) t_q(2^{-p} \cdot)$$

verifica la condición 2 sobre el conjunto $\{\hat{f} : f \in \mathcal{D}\}$.