INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

MARIELA SUED

Las presentes notas resumen los tópicos incluídos en una serie de charlas concebidas para introducir el Cálculo Estocástico a un público poco familiarizado con la teoría de las probabilidades, dictado en el Instituto de Cálculo del FCEyN, UBA en diciembre de 2002. Las notas son un borrador, por favor enviar correcciones a msued@dm.uba.ar

1. Definiciones Básicas y Esperanza Condicional

Una variable aleatoria es una función $\mathcal{A}$ medible $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, donde $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad completo. Toda variable aleatoria induce una probabilidad μ_X en $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)) \ .$$

μ_X se llama función de distribución de X. Cuando $\int \|X(\omega)\| dP(w) < \infty$, decimos que X es integrable y llamamos esperanza de X a

$$E[X] = \int_\Omega X(w) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x d\mu_X(x) \ .$$

Dada una variable aleatoria X, $\mathcal{F}_X$ es la menor σ-álgebra para la cual X resulta medible.

Definición 1.1. 1- *Dos conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen independientes si*

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \ .$$

2- *Una colección $\{\mathcal{H}_i; i \in I\}$ de σálgebras se dice independiente si*

$$P(H_{i_1} \cap \ldots H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \ldots P(H_{i_k}) \ ,$$

para todas las posibles elecciones de $H_{i_j} \in \mathcal{H}_{i_j}$.

3- *Una colección de variables aleatorias $\{X_i; i \in I\}$ se dice independiente si la colección de σ-álgebras inducidas $\{\mathcal{F}_{X_i}\}$ es independiente.*

4- *La variable aleatoria X se dice independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_X$ es independiente de $\mathcal{F}$. Equivalentemente, podemos pedir que I_A resulte independiente de X para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$, siendo I_A la función que sobre los elementos de A vale uno y cero en el complemento.*

Queremos ahora definir esperanza condicional. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Si X es una variable aleatoria integrable definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la esperanza condicional de X con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}$, denotada por $E[X/\mathcal{F}]$, se define de la siguiente manera:

Definición 1.2. *$E[X/\mathcal{F}]$ es la única (pp respecto de P) función de Ω en $\mathbb{R}^n$ tal que*

(1) *$E[X/\mathcal{F}]$ es $\mathcal{F}$-medible.*
(2) *$\int_A E[X/\mathcal{F}]\, dP = \int_A X\, dP$ para todo $A \in \mathcal{F}$.*

Existencia y unicidad de $E[X/\mathcal{F}]$ es una simple consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym: Sea μ la medida en $\mathcal{F}$ definida por

$$\mu(A) = \int_A X\, dP, \qquad \text{para } A \text{ en } \mathcal{F} \ .$$

Tenemos entonces que μ es absolutamente continua con respecto a P, restringida a $\mathcal{F}$. Sabemos entonces que existe una única función F, $\mathcal{F}$-medible tal que

$$\mu(A) = \int_A F\, dP \ .$$

Tenemos entonces que $E[X/\mathcal{F}] := F$ verifica lo pedido. Antes de enunciar algunas propiedades importantes de la esperanza condicional, consideremos el siguiente ejemplo: Supongamos que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sea en realidad un álgebra, generada por una partición finita del espacio. $\Omega = \cup_{i=1}^k F_i$ con $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$, con $F_i \in \mathcal{A}$. ¿Cuánto vale en este caso $E[X/\mathcal{F}]$?

Siendo que $E[X/\mathcal{F}]$ debe ser $\mathcal{F}$ medible (item (1) en Definición 1.2), tiene que ser constante en cada F_i. Es decir, sabemos que

$$E[X/\mathcal{F}](\omega) = x_i \qquad \text{si } \omega \in F_i \ .$$

Debemos ahora determinar el valor de cada x_i. Para ello, utilizaremos la segunda condición impuesta a la esperanza condicional (item (2) de Definición 1.2). Queremos que

$$\int_{F_i} E[X/\mathcal{F}]\, dP = \int_{F_i} X\, dP$$

para $i = i, \cdots, k$. Como en F_i $E[X/\mathcal{F}]$ vale x_i, queremos que

$$\int_{F_i} x_i\, dP = \int_{F_i} X\, dP \ ,$$

es decir,

$$x_i = \frac{\int_{F_i} X\, dP}{P(F_i)} \ .$$

Concluimos entonces que

$$E[X/\mathcal{F}](\omega) = \frac{\int_{F_i} X\, dP}{P(F_i)} \quad \text{si } \omega \in F_i \ .$$

Observación 1.3. *La $E[X/\mathcal{F}]$ vale en cada F_i el promedio de X sobre F_i.*
Ahora sí, enunciaremos las principales propiedades de la esperanza condicional.

Teorema 1.4. *Sea $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ otra variable aleatoria integrable, $a, b \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que*

a) $E[aX + bY/\mathcal{F}] = aE[X/\mathcal{F}] + bE[Y/\mathcal{F}]$.
b) $E[E[X/\mathcal{F}]] = E[X]$.
c) $E[X/\mathcal{F}] = X$ *si* X *es* $\mathcal{F}$*-medible.*
d) $E[X/\mathcal{F}] = E[X]$ *si* X *es independiente de* $\mathcal{F}$.
e) $E[YX/\mathcal{F}] = YE[X/\mathcal{F}]$ *si* Y *es* $\mathcal{F}$*-medible.*
f) *Dadas dos* σ*-álgebras* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, *vale que*

$$E\Big[E[X/\mathcal{F}]\Big/\mathcal{G}\Big] = E[X/\mathcal{G}] \ .$$

g) *Si* $X_1 \leq X_2$ *entonces* $E[X_1/\mathcal{F}] \leq E[X_2/\mathcal{F}]$.
h) *Si* ϕ *es una función convexa, entonces* $\phi\left(E[X/\mathcal{F}]\right) \leq E[\phi X/\mathcal{F}]$.

Otra forma de pensar la esperanza condicional es la siguiente: consideremos $L^2(P)$, el espacio de funciones $\mathcal{A}$-medibles de cuadrado integrable. Dada la σ-álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, sea $\mathcal{X}$ el conjunto de funciones $\mathcal{F}$-medibles de cuadrado integrable. $\mathcal{X}$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(P)$. Podemos definir entonces la proyección ortogonal $\pi_{\mathcal{X}} \colon L^2(P) \to \mathcal{X}$. Tenemos entonces que para X en $L^2(P)$, $E[X/\mathcal{F}] = \pi_{\mathcal{X}}(X)$.

Definición 1.5. *Un filtro es una familia creciente de σ-álgebras $(\mathcal{F}_s : s \in I)$ con $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s \leq t$.*

Definición 1.6. *Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias*

$$\{X_t\}_{t \in I}$$

definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tomando valores en $\mathbb{R}^n$.

En estas notas I va a ser un conjunto discreto, un intervalo en la recta o la semirrecta $[0, \infty)$. Para cada t fijo, tenemos una variable aleatoria

$$\omega \to X_t(w),\ \omega \in \Omega\ .$$

Por otro lado, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, tenemos una trayectoria

$$t \to X_t(\omega),\ t \in I\ .$$

Definición 1.7. *Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, diremos que el proceso $(B_t)_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar sobre el espacio Ω si:*

1) *Casi todas la trayectorias son continuas. Es decir, existe $\Omega_0 \subset \Omega$ con $P(\Omega_0) = 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega_0$*

$$t \to B_t(\omega)\ , t \geq 0$$

es continua.

2) *(B_t) tiene incrementos con distribución normal. Para $n \in \mathbb{N}$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias $B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes con*

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim N(0, t_{i+1} - t_i)\ .$$

3) *$B_0 = 0$ P casi todo punto.*

En la próxima sección mostraremos la existencia de tal proceso. Pongamos $\mathcal{F}_t$ para la σ-álgebra generado por $(B_s; s \leq t)$. El segundo ítem en la definición 1.7 dice que la variable aleatoria $B_t - B_s$ es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} E[B_t/\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s) + B_s/\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)/\mathcal{F}_s] + E[B_s/\mathcal{F}_s] = \\ &\quad E[(B_t - B_s)] + B_s = B_s \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde, para obtener la primer igualdad, sumamos y restamos B_s, luego usamos linealidad de la esperanza condicional, en la tercer igualdad usamos que B_s es $\mathcal{F}_s$ medible y que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

La relación obtenida en (1.1) está diciéndonos que el mejor predictor (con respecto al error cuadrático medio) para el futuro basado en toda la información disponible hasta el momento es el valor de nuestro proceso en el presente. Veamos otro ejemplo del mismo fenómeno.

Consideremos

$$
\begin{aligned}
E[B_t^2 - t/\mathcal{F}_s] &= E[[(B_t - B_s) + B_s]^2 - t/\mathcal{F}_s] \qquad (1.2)\\
&= E[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] + 2E[(B_t - B_s)B_s/\mathcal{F}_s] + E[B_s^2/\mathcal{F}_s] - t\\
&= t - s + 2B_s E[(B_t - B_s)/\mathcal{F}_s] + B_s^2 - t\\
&= B_s^2 - s\ .
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que, si definimos $X_t = B_t^2 - t$, este proceso verifica que

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s\ .$$

Todos aquellos procesos que verifiquen esta propiedad se llaman Martingalas.

Definición 1.8. *Un proceso estocástico $(M_t, t \geq 0)$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice Martingala a tiempo continuo con respecto a la familia creciente de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$ si:*

(i) *M_t es $\mathcal{F}_t$ medible para todo t (proceso adaptado),*
(ii) *$E[|M_t|] < \infty$ para todo t y finalmente*
(iii) *$E[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$ para todo $s \leq t$.*

Acabamos de ver que B_t y $B_t^2 - t$ son Martingalas con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

También podemos definir Martingalas para procesos a tiempo discreto.

Definición 1.9. *Un proceso estocástico $(X_n, n \in \mathbb{N})$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice Martingala a tiempo discreto con respecto a la familia creciente de σ-álgebras $\mathcal{F}_n$ si:*

(i) *X_n es $\mathcal{F}_n$ medible para todo n (proceso adaptado),*
(ii) *$E[|X_n|] < \infty$ para todo n y finalmente*
(iii) *$E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ para todo n .*

Observemos que la tercera condición en la definición previa es equivalente a pedir que $E[X_n/\mathcal{F}_m] = X_m$, para todo $m \leq n$. Una primera propiedad importante de las Martingalas es que tienen esperanza constante. Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos (Z_n) una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[Z_n] = 0$ para todo n. Sea $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ con $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i, i \leq n)$ el filtro generado por el propio proceso. Observemos que $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_i, i \leq n)$. Vamos a mostrar que (X_n) es una $\mathcal{F}_n$ Martingala. La propiedad más "complicada" es la que involucra la esperanza condicional.

$$E[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = E[\sum_{i=1}^{n+1} Z_i/\sigma(Z_i, i \leq n)] = \sum_{i=1}^{n} Z_i + E[Z_{n+1}/\sigma(Z_i, i \leq n)] = X_n\ ,$$

siendo que Z_{n+1} es independiente de $\mathcal{F}_n$ y $E[Z_{n+1}] = 0$.

Ejemplo 2. Sea Z una variable aleatoria definida en el espacio Ω con $E[|Z|] < \infty$. Sea $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ (t puede ser un parámetro continuo o discreto) una familia creciente de σ-álgebras. Consideremos el proceso estocástico M_t definido por

$$M_t = E[Z/\mathcal{F}_t] \qquad \text{para } t \geq 0\ .$$

Haciendo uso de las propiedades de la esperanza condicional tenemos que $(M_t, \mathcal{F}_t)$ es una Martingala.

Ejemplo 3. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una Martingala discreto. Consideremos un proceso (C_n) integrable ($E[|C_n|] < \infty$) tal que C_n sea $\mathcal{F}_{n-1}$ medible. Procesos con esta última propiedad se dicen previsibles. Consideremos

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i - X_{i-1}) \ .$$

Tenemos entonces que $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ es una nueva Martingala.

2. Movimiento Browniano

El objetivo de esta Sección es esbozar una de las posibles construcciones del Movimiento Browniano, definido en (1.7).

Una pregunta natural es saber si existe un proceso satisfaciendo las condiciones exigidas en la definición (1.7). Caso exista, tal proceso induce una probabilidad en el espacio de funciones continuas $C([0,\infty),\mathbb{R})$ de forma tal que las proyecciones verifican las propiedades 1), 2) y 3), exigidas para que un proceso sea un Movimiento Browniano. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Omega_0 & \longrightarrow & C([0,\infty),\mathbb{R}) \\ \omega & \longrightarrow & (B_t(\omega))_{t\geq 0} \end{array} \tag{2.1}$$

y denotemos por W a la probabilidad inducida en $C([0,\infty),\mathbb{R})$. Para $f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ definimos la proyección $\pi_t(f) = f(t)$ (algunos prefieren pensar en la evaluación ev_t). Tenemos entonces que, en el espacio $C([0,\infty),\mathbb{R})$ con la σ-álgebra generada por todas las proyecciones y la medida W recién definida, π_t verifica lo pedido en la definición (1.7). Más aún, puede mostrarse que W es la única probabilidad en el espacio $C([0,\infty),\mathbb{R})$ para la cual las proyecciones resultan ser un Movimiento Browniano. La probabilidad W se dice medida de Wienner.

Para mostrar la existencia del Movimiento Browniano, vamos directamente a construir la medida de Wienner.

Teorema 2.1. *Existe una única probabilidad en el espacio $C([0,\infty),\mathbb{R})$ para la cual las proyecciones π_t definen un Movimiento Browniano estándar.*

Demostración: En el espacio $C([0,\infty),\mathbb{R})$ las distribuciones finito-dimensionales caracterizan medida. Es decir, si μ_1, μ_2 son dos medidas en $C([0,\infty),\mathbb{R})$ tales que coinciden en los conjuntos cilíndricos, entonces $\mu_1 = \mu_2$. Esto garantiza unicidad de la medida de Wienner (ya establecimos cuánto queremos que valgan las finito dimensionales).

Sea X_i una sucesión de variables aleatorias iid definidas en el espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, con $\tilde{P}(X_i = 1) = \tilde{P}(X_i = -1) = 1/2$. Para cada N, consideremos los puntos de la forma i/N para $i = 0, 1 \cdots$. A cada $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ le asignamos la trayectoria $\tilde{Z_t^N}$, comenzando en el origen, dada por

$$\tilde{Z_t^N}(\tilde{\omega}) \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} X_j(\tilde{\omega}) & \text{para } t = k/N \\ \text{interpolamos linealmente} & \text{para } k/N \leq t \leq (k+1)/N \ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Para $t = k/N$ tenemos que $E[\tilde{Z_t^N}] = 0$ pero $Var(\tilde{Z_t^N}) = k$, razón por la cual necesitamos renormalizar. Definimos $Z_t^N = \tilde{Z_t^N}/\sqrt{N}$. Es decir:

$$Z_t^N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} X_j + (tN - [tN]) \frac{X_{[tN]+1}}{\sqrt{N}}$$

Dada la aplicación $Z^N : \tilde{\Omega} \to C([0,\infty), \mathbb{R})$ denotemos por W_N a la probabilidad que esta aplicación induce en el espacio de llegada. Puede mostrarse que las medidas W_n convergen débilmente y el límite es la medida W buscada (se ve que la sucesión W_n es relativamente compacta y que puede tener un único punto de acumulación). □

Lema 2.2. *Casi todas las trayectorias del Movimiento Browniano no tienen derivada en ningún punto. Casi todas las trayectorias tienen variación no limitada.*

Lema 2.3. *Dado $a < b$ y una partición π del intervalo $[a, b]$ $a = t_0 < t_1, \cdots, t_j$, tenemos que*

$$\sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \to b - a$$

en L^2 cuando la medida de la partición va a cero.

Este resultado ha de ser de crucial importancia a la hora de definir la integral estocástica. De alguna forma estiá diciéndonos que $(dB_t)^2 = dt$.

3. Integral de Ito

A la ecuación diferencial

$$dX_t = b(t, X_t)dt \tag{3.1}$$

queremos agregarle "ruido". Dada una partición $0 = t_0, \cdots t_m = t$, consideremos la discretización de la ecuación (4.2):

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k \ , \tag{3.2}$$

donde

$$X_k = X_{t_k} \ , \Delta t_k = t_{k+1} - t_k \ .$$

A la precedente ecuación agreguémosle un término aleatorio correspondiente al ruido:

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)(B_{k+1} - B_k) \ , \tag{3.3}$$

donde $(B_s\,; s \geq 0)$ es un Movimiento Browniano comenzando en el origen y $B_k = B_{t_k}$. Tenemos entonces que X_k está dada por la fórmula

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j \ .$$

El próximo paso consiste en calcular el límite de estas sumas cuando el tamaño de la partición va a cero. Trátase entonces de estudiar

$$\lim \sum_{j=0}^{k-1} f(t_j, w)\Delta B_j \ , \tag{3.4}$$

para una clase de procesos a ser determinada. Tal como comentamos, las trayectorias del Movimiento Browniano no tienen variación limitada, impidiéndonos calcular integrales de Riemman Stiljes. No vamos a poder calcular el límite para cada $\omega \in \Omega$. Sin embargo, tenemos variación cuadrática finita. Es más, puede mostrarse que

$$\lim \sum \|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\|^2 = t \tag{3.5}$$

en L^2, cuando el tamaño de la partición va a cero, tal como enunciamos en la previa sección.

Esta sección tiene dos objetivos. Especificar en qué sentido estamos calculando el límite (3.4) y encontrar una clase de procesos para los cuales el límite exista. De esta manera habremos definido la integral estocástica.

Observación 3.1. *Para calcular $\int_0^t B_s dB_s$ tomemos una partición π dada por $0 = t_0, \cdots t_m = t$. Resultan naturales las siguientes dos opciones:*

(1) $X_\pi = \sum B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$,
(2) $Y_\pi = \sum B_{t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

Siendo B_{t_i} independiente de $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ y este último de esperanza 0, tenemos que $E[X_\pi] = 0$ para toda partición. En cambio, sumando y restando B_{t_i} en Y_π obtenemos que $E[X_\pi] = t$. Es decir, depende qué punto elijamos dentro del intervalo, obtenemos cosas bien diferentes. La integral de Ito toma el extremo izquierdo de cada intervalo a la hora de calcular las sumas.

La observación anterior está íntimamente ligada con la siguiente pregunta: Qué clase de procesos $f(s,\omega)$ vamos a poder integrar? $f(t_j,\omega)$ va a tener que depender de $B_s(\omega), s \leq t_j$. Con esto queremos decir que si ω_1, ω_2 son tales que $B_s(\omega_1) = B_s(\omega_2)$ para todo $s \leq t_j$, entonces $f(t_j,\omega_1) = f(t_j,\omega_2)$.

Definición 3.2. *Dado un Movimiento Browniano B_s, definimos la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ como la generada por $\{B_s\,; s \leq t\}$.*

Intuitivamente, la σ- álgebra $\mathcal{F}_t$ contiene toda la información disponible hasta el instante t . Dadas dos realizaciones cuyas trayectorias no se despegaron hasta el instante t, éstas son indistinguibles para la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$.

Definición 3.3. *Dada una familia creciente de σ-álgebras $\mathcal{N}_t$, un proceso $g(t,\omega)\colon [0,\infty)\times \Omega \to \mathbb{R}^n$ se dice $\mathcal{N}_t$ adaptado si para cada t la función*

$$\omega \to g(t,\omega)$$

es $\mathcal{N}_t$ medible.

Estamos ya en condiciones de describir la clase de procesos que sabremos integrar.

Definición 3.4. *El proceso $f(t,\omega)\colon [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ se dirá integrable hasta el instante T si*

(1) *$(t,\omega) \to f(t,\omega)$ es $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ medible, siendo $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Boreleanos en $[0,\infty)$.*
(2) *$f(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$ adaptado.*
(3) *$E[\int_o^T f(s,\omega)^2 ds] < \infty$.*

Vamos ahora a definir la integral de Ito. Empecemos trabajando con procesos simples. Consideremos una partición $\pi = 0 = t_0, \cdots, t_m$ del intervalo $[0,T]$. Un proceso se dirá simple si es de la forma

$$\phi(s,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\, I_{(t_j,t_{j+1}]}(s) \ . \tag{3.6}$$

Para que este proceso sea $\mathcal{F}_t$ adaptado, necesitamos que las variables aleatorias e_j sean medibles para la σ-álgebra $\mathcal{F}_{t_j}$. Notemos por S la familia de procesos dados por la fórmula (3.6). Para $\phi \in S$, definimos

$$\int_0^T \phi dB_s = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(\omega) \ . \tag{3.7}$$

Lema 3.5. *(Isometría de Ito). Dado un proceso ϕ simple y limitado, tenemos que*

$$E[\Big(\int_0^T \phi dB_s\Big)^2] = E[\int_0^T \phi(s,\omega)^2 ds]$$

Demostración: Pongamos $\Delta_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Haciendo uso de las propiedades de la esperanza condicional, tenemos que

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ E[e_i^2](t_{i+1} - t_i) & \text{si i=j} \end{cases}$$

Luego

$$E[\Big(\int_0^T \phi dB_s\Big)^2] = \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_i E[e_i^2](t_{i+1} - t_i) = E[\int_0^T \phi(s,\omega)^2 ds] \ .$$

□

Observemos que los procesos simples forman un espacio vectorial y que la integral de Ito resulta ser un operador lineal. El próximo paso consiste en ver que las funciones simples son densas entre las integrables y hacer uso de la isometría para poder extender la noción de integral a cualquier proceso integrable. Procedemos en tres pasos:

1) Todo proceso g integrable limitado de trayectorias continuas es aproximable por una sucesión ϕ_n de procesos simples de forma tal que
$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^T (g(s,\omega) - (\phi_n(s,\omega))^2 ds] = 0 \ .$$
2) Dado un proceso integrable limitado h, existe una sucesión de procesos g_n limitados con trayectorias continuas que aproxima a h:
$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^T (h(s,\omega) - (g_n(s,\omega))^2 ds] = 0 \ .$$
3) Todo proceso integrable puede ser aproximado por una sucesión h_n de procesos integrables limitados.

Teorema 3.6. *Dado f integrable en $[0,T]$, podemos construir una versión de la integral estocástica*

$$\int_0^t f(s,w) dB_s \ , 0 \leq t \leq T$$

con trajectorias continuas. Es decir: existe un proceso J_t continuo pp, definido en en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que

$$P[J_t = \int_0^t f(s,w) dB_s] = 1 \ , \qquad \textit{para todo } t, 0 \leq t \leq T \ .$$

Lema 3.7. *Propiedades de la integral estocástica:*

1) $\int_0^t f_s dB_s$ *es un proceso adaptado.*

2) *Vale la isometría.*
3) $\int_0^t f_s dB_s$ *es una Martingala.*
4) *Linealidad.*

Demostración del Lema 3.7 Todas las propiedades enunciadas en el lema son fácilmente verificables cuando se trata de integrales de procesos simples. Es más, en tal caso podemos calcular explícitamente la integral estocástica. Si $f = \sum e_j I_{(t_j, t_{j+1}]}$, entonces vale que

$$\int_0^t f_s dB_s = \begin{cases} e_0[B_t - B_0] & \text{para } t \leq t_1 \ , \\ e_0[B_t - B_0] + e_1[B_t - B_] & \text{para } t_1 \leq t \leq t_2 \ , \\ \sum_{j=0}^{k-1} e_j[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] + e_k[B_t - B_{t_k}] & \text{para } t_k \leq t \leq t_{k+1} \ . \end{cases} \tag{3.8}$$

Para la integral de procesos más generales, haciendo uso de teoría de Martingalas, puede mostrarse que existe una versión continua. El resto de las propiedades se extiende por continuidad: vale para procesos simples, entonces vale para todos los integrables.

Observación 3.8. *Artesanalmente, puede mostrarse que para un proceso integrable con trayectorias continuas a derecha, las sumas parciales convergen en* L^2 *a lo que dimos en llamar integral estocástica:*

$$\sum f_{t_i}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] \to \int f_s dBs$$

4. Formula de Ito

Todos conocemos la regla de la cadena para diferenciar. Sabemos que

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s)) dgs \ ,$$

para g suficientemente buena. Queremos ahora ver qué pasa cuando ponemos un Browniano en lugar de $g(t)$. Cuál es la representación en forma integral que tenemos para

$$f(B_t) - f(B_0) = ????$$

Para ello, telescopizamos. Tomamos una partición $0 = t_0, t_1 \ldots, t_m = t$ y ponemos

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{m-1} [f(B_{i+1}) - f(B_{t_i})]$$

Vamos ahora a usar Taylor:

$$[f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i})] = f'(B_{t_i})[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] + 1/2 f''(B_{t_i})[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2$$

Teorema 4.1. *Dada* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *suficientemente regular, tenemos que*

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + 1/2 \int_0^t f''(B_s) ds \ .$$

Es más, si consideramos ahora $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *buena, tenemos que*

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \partial_s f(s, B_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, B_s) dB_s + 1/2 \int_0^t \partial_x^2 f(s, B_s) ds$$

Otra manera de decir lo mismo es

$$df(t,B_t) = \partial_t f(t,B_t)dt + \partial_x f(t,B_t)dB_t + 1/2\partial_x^2 f(t,B_t)dt$$

Obsérvese que el último término es nuevo y proviene del hecho que la variación cuadrática del Browniano es del orden de t. No podemos despreciarla.

Aplicación de la fórmula de Ito: Considere la ecuación estocástica

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dB_t\ . \tag{4.1}$$

Es decir, buscamos un proceso que admita la siguiente representación

$$X_t - X_0 = \int_0^t X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s\ .$$

Proponemos solución de la forma $X_t = f(t,B_t)$ y haciendo uso de la fórmula de Ito, vamos a obtener una ecuación para $f(t,x)$. Como queremos que dX_t sea igual a $df(t,B_t)$, obtenemos que

$$[\partial_t f(t,B_t) + 1/2\partial_x^2 f(t,B_t)]dt + \partial_x f(t,B_t)dB_t = \mu\, f(t,B_t)\, dt + \sigma\, f(t,B_t)\, dB_t\ ,$$

de donde deducimos las siguientes ecuaciones para $f(t,x)$:

$$\partial_t f(t,x) + 1/2\partial_x^2 f(t,x) = \mu\, f(t,x) \tag{4.2}$$

$$\partial_x f(t,x) = \sigma\, f(t,x)\ . \tag{4.3}$$

Vamos a resolver este sistema. De la segunda ecuación (4.3), tenemos que $f(t,x) = g(t)exp\{\sigma x\}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.2) obtenemos que $g(t) = g(0)exp\{(1/2\sigma - \mu)t\}$. Tenemos entonces que el proceso X_t solución de la ecuación estocástica 4.1, viene dado por:

$$X_t = X_0\, exp\{(1/2\sigma - \mu)t\}exp\{\sigma B_t\}\ .$$

Pongamos nuestra ecuación 4.1 en forma integral. Tenemos entonces que el proceso X_t admite la siguiente representación:

$$X_t - X_0 = \int_0^t \mu\, X_s\, ds + \int_0^t \sigma\, X_s\, dB_s\ . \tag{4.4}$$

Queremos ahora calcular $E[X_t]$. Para ello tomamos esperanza en 4.4 y por Fubbini, sabemos que la esperanza conmuta con la integral ds. Por otro lado sabemos que $\int_0^t \sigma\, X_s\, dB_s$ es una Martingala y por lo tanto tiene esperanza constante, igual a cero en este caso. Tenemos entonces que

$$E[X_t] - E[X_0] = \int_0^t \mu\, E[X_s]\, ds\ .$$

Muy loco lo que está pasando! En media (al tomar esperanza), nuestro proceso satisface la misma ecuación que antes de agregarle el ruido.

5. Difusiones

El primer resultado de esta sección dice sobre existencia y unicidad de solución de la ecuación

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{5.1}$$

con condición inicial.

Teorema 5.1. *Si b y σ son suficientemente buenas (Lipschitz y algo más), dada la condición inicial $X_0 = Z_0$ para $Z_0 \in \mathcal{F}_0$, existe una única solución t-continua del problema 5.1 con condición inicial. La solución se llama difusión.*

Unicidad de la solución permite mostrar que las difusiones son procesos de Markov.

Definición 5.2. *Llamaremos difusión homogénea de Ito al proceso estocástico $X_s(\omega) = X(s, \omega)\colon [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaciendo una ecuación diferencial estocástica de la forma*

$$dX_s = b(X_s)ds + \sigma(X_s)dB_s, \quad s \geq 0 \qquad X_0 = x \ ,$$

donde B_s es un Movimiento Browniano m dimensional, b y σ son buenas funciones.

Lema 5.3. *Fórmula de Ito para difusiones.*

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + 1/2f''(X_t)(dX_t)^2$$
$$df(X_t) = f'(X_t)[b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t] + 1/2f''(X_t)\sigma(X_t)^2dt$$
$$df(X_t) = (f'(X_t)b(X_t) + 1/2f''(X_t)\sigma(X_t)^2)dt + \sigma(X_t)f'(X_t)dB_t$$

Teorema 5.4. *(Markovianidad de las difusiones de Ito) Sea f una función medible limitada de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Tenemos entonces que para $t, h \geq 0$*

$$E_x[f(X_{t+h}/\mathcal{F}_t](\omega) = E_{X_t(\omega)}[f(X_h)] \ , \tag{5.2}$$

donde E_x corresponde a la difusión con condición inicial $X_0 = x$.

La demostración de este resultado depende de la unicidad de soluciones para la ecuación junto con la existencia de una buena clase de funciones para la cual el resultado es trivial. El próximo paso consiste en extender este concepto para una clase de tiempos más generales. En lugar de trabajar con la σ-álgebra correspondiente a un instante t, pretendemos extender este resultado a σ-álgebras asociadas a tiempos aleatorios. Comencemos explicando qué entendemos por tiempo aleatorio.

Definición 5.5. *Una función $\tau\colon \Omega \to [0, \infty]$ se dice tiempo de parada con respecto a $(\mathcal{F}_t)$ si*

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \textit{para todo } t \ .$$

Es decir, para saber si paramos antes del instante t necesitamos conocer la historia del proceso hasta ese momento.

El primer ejemplo de tiempo de parada es el siguiente: Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y un proceso X_t con trayectorias continuas, el instante de la primera salida de U, definido por

$$\tau_U = inf\{t \geq 0 : X_t \notin U\}$$

resulta ser un tiempo de parada. En cambio, si queremos considerar la última visita a un conjunto dado, no ha de ser un tiempo de parada.

Dado un tiempo de parada τ, queremos definir matemáticamente qué entendemos por información disponible hasta el instante τ. Para ello definimos la σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$ formada por los conjuntos N tales que

$$N \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \qquad \text{para todo } t \tag{5.3}$$

Teorema 5.6. *Propiedad Fuerte de Markov: Dada una función medible limitada f en $\mathbb{R}^n$ y un tiempo de parada τ con $\tau < \infty$ pp, tenemos entonces que toda difusión de Ito X_t verifica la siguiente propiedad:*

$$E_x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau](\omega) = E_{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \quad \textit{para todo } h > 0 \; . \tag{5.4}$$

Nuestro próximo objetivo es calcular el generador L para una difusión. Trátase de un operador diferencial que nos permitirá derivar medias observables. Más precisamente, trátase de definir

$$Lf(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{E_{x_0}[f(X_t)] - f(x_0)}{t} \tag{5.5}$$

para una clase de funciones f suficientemente grandes, siendo X_t la solución de la ecuación estocástica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \; ,$$

y E_{x_0} corresponde al proceso con condición inicial $X_0 = x_0$. Para poder calcular el límite en (5.5), usemos la fórmula de Ito para escribir

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t [f'(X_s)b(X_s) + 1/2 f''(X_s)\sigma(X_s)^2]ds + \int_0^t \sigma(X_s)f'(X_s)dB_s \; . \tag{5.6}$$

El último término en la expresión previa es una Martingala, razón por la cual tiene esperanza constante, en este caso, igual a cero. Tenemos entonces que

$$\frac{E_{x_0}[f(X_t)] - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t} E_{x_0}[\int_0^t f'(X_s)b(X_s) + 1/2 f''(X_s)\sigma(X_s)^2)ds] \; .$$

Cuando $s \to 0$, $X_s \to x_0$. Luego podemos adivinar cuánto vale el límite cuando $t \to 0$ del término a la derecha en la previa expresión.

$$\begin{aligned} Lf(x_0) &= \lim_{t \to 0} \quad \frac{1}{t} E_{x_0}[\int_0^t f'(X_s)b(X_s) + 1/2 f''(X_s)\sigma(X_s)^2)ds] && (5.7) \\ &= f'(x_0)b(x_0) + 1/2 f''(x_0)\sigma(x_0)^2 \; . && (5.8) \end{aligned}$$

Nótese que si reemplazamos la definición de Lf en (5.6), tenemos que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \tag{5.9}$$

es una Martingala y, por lo tanto, tiene esperanza constante. Igual a cero, en este caso.

Aplicación: Trátase de usar que la expresión que aparece en (5.9) es una Martingala para resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} 1/2 f'' = 0 \; , \\ f/\partial B = g \; , \end{cases} \tag{5.10}$$

donde B es un intervalo en $\mathbb{R}$, ∂B su frontera y g es la condición de frontera. El Movimiento Browniano satisface la ecuación

$$dB_t = dB_t \; .$$

Luego, el generado correspondiente al Movimiento Browniano es dado por $Lf = 1/2f''$. La primera condición en (5.10) está diciendo que $Lf = 0$. En tal caso, de (5.9) tenemos que $f(B_t) - f(B_0)$ es una Martingala, razón por la cual tiene esperanza constante. En particular, tenemos que si $B_0 = x$

$$E_x[f(B_t)] = f(x) , \tag{5.11}$$

para todo t. Como consecuencia de la propiedad fuerte de Markov, este resultado es válido incluso cuando reemplazamos un instante t fijo por un tiempo de parada finito. Consideremos

$$\tau = \inf\{t : B_t^x \in \partial B\} ,$$

donde B_t^x es un Movimiento Browniano comenzando en x. Tenemos entonces que $B_\tau \in \partial B$ razón por la cual $f(B_\tau) = g(B_\tau)$, caso la segunda condición en (5.10) sea satisfecha.

Tomando τ en lugar de t en (5.11) y considerando las observaciones previas, tenemos que

$$f(x) = E_x[g(B_\tau)] ,$$

resulta ser una representación estocástica para el problema de Cauchy presentado en (5.10).

En general, si consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lf = 0 , \\ f/\partial B = g , \end{cases} \tag{5.12}$$

donde L es un operador diferencial lineal de segundo orden dado por

$$Lf(x) = s(x)f'(x) + t(x)f''(x) \tag{5.13}$$

con $t(x) \geq 0$, podemos construir una difusión X_t teniendo L por generador. Más específicamente, tomando $b = s$,$1/2\sigma^2 = t$ y X_t solución de la ecuación estocástica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t ,$$

tenemos que el generador de X_t está dado por (5.13). Reproduciendo las cuentas hechas para para el problema anterior, obtenemos que la solución de este problema admite la siguiente representación

$$f(x) = E_x[g(X_\tau)] ,$$

siendo τ el instante de salida de B.

Para una función $f(s, x)$ la fórmula de Ito está diciéndonos que

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t [\partial_s f(s, X_s) - Lf_s(X_s)]ds = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \tag{5.14}$$

es una Martingala, siendo $f_s(x) = f(s, x)$. Queremos hacer uso de esta fórmula para encontrar $f(t, x)$, solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \partial_t f = 1/2\partial_x^2 f , \\ f(0, x) = f_0(x) , \end{cases} \tag{5.15}$$

para la condición inicial f_0. La idea es la siguiente: si f es solución de la ecuación (5.15), fijamos t y usando la fórmula (5.14) tenemos que $f(t-s, B_s)$ para $0 \leq s \leq t$

es una Martingala. Luego, tenemos que $E_x[f(t-s,B_s)]$ no depende de s. Tomemos $s=0$ y $s=t$ para deducir que

$$f(t,x) = E_x[f(t,B_0)] = E_x[f(0,B_t)] = E_x[g(B_t)]\,.$$

Este resultado puede ser generalizado.

Referencias

[1] Oksendahl, B. (1985) Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications. Springer.

[2] Mikosch, T. (1998) Elementary Stochastic Calculus. World Scientific.